UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第１講
ガイダンス

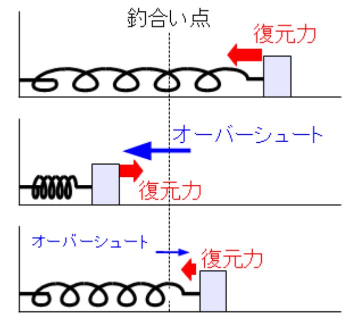
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

振動とは？

- 同じ場所を行ったり来たりする運動のこと
- 主要因は**復元力**！
- **オーバーシュート**
  ＝行き過ぎ



2

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

代表的な振動（一部）

- 強制振動

振動的な外力 → 振動系 → 振動的な運動

- 自由振動

外力なし　振動系 → 振動的な運動

- 自励振動（非線形振動の１つ）

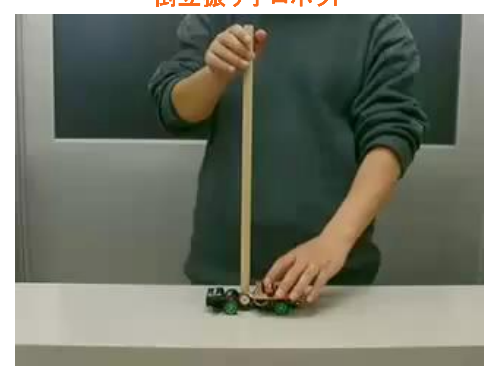
非振動的な外力 → 振動系 → 振動的な運動

3

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

振動現象の実例１　（自由振動）

倒立振り子ロボット



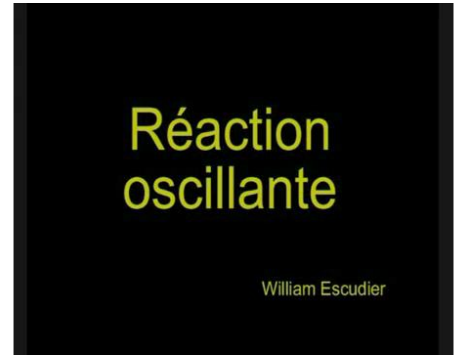
4

振動現象の実例2 （自励振動）

タコマナローズ橋の崩壊

振動現象の実例3 （自励振動）

BZ（ベロウソフ･ジャボチンスキー）反応

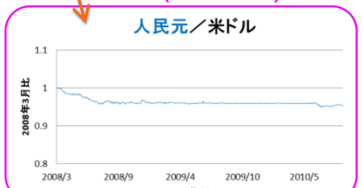


振動現象の実例4

≒自然現象

中国政府による制御
（為替介入）

人工(制御あり)



「復元力」の教訓

- 「機械モノ」は必ず振動する！

  ∵形状を保つための復元力を有する
  （さもないとバラける）

- 「フィードバック制御系」は振動する！

  ∵目標状態を保つ制御力＝復元力
  （さもないと目標からズレる）

➔振動工学と制御工学は数学が共通

スケジュール

	テーマ	内容	資料
1講（30分）	ガイダンス	振動とは？	vib7h_A.ppt
2講（60分）	自由振動	自由振動（6種），固有値	
3講（30分）		減衰比，固有振動数	
4講（60分）	運動方程式の立て方	解析力学，線形化	vib7h_B.ppt
5講（60分）	強制振動	強制振動，共振	vib7h_C.ppt
6講（60分）		周波数応答，基本振動数3つ	
7講（30分）	非線形振動ほか	連成振動，初期値依存性	vib7h_D.ppt
ディスカッション			

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第2講
自由振動と固有値

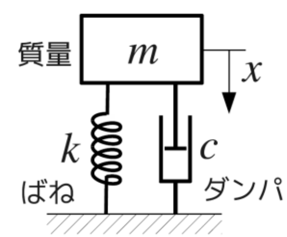
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

- 自由振動のモデル
  - カ学モデル（質量，ばね，ダンパー）
  - 数理モデル（運動方程式）
- 自由振動のパターン
  - 振動するか否か
  - 減衰か，一定か，発散か
- 振動の固有値
  - 振動パターンの固有値による予測・分類

自由振動モデル（1自由度線形自由振動系）



状態量

x	変位 [m]

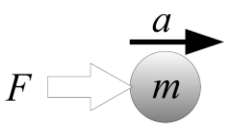
m	質量 [kg]
k	ばね定数 [N/m]
c	減衰係数 [Ns/m]

パラメータ

- 振動が起こる，最も単純なカラクリ
- m,c,k の設定で，身の周りの多くの振動パターンを再現できる

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》高校の運動方程式



$ma = F$

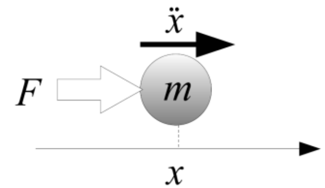
- 質量m × 加速度a ＝ 力 F
- $ma = F$ を解いても，加速度 a しか分からず，運動は不明．

運動＝変位の時間変化

14

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》大学の運動方程式



$m\ddot{x} = F$

- 変位を表す変数 x を導入
- 微分演算を導入
  - □速度 $\dot{x}$ ･･･変位 x の1回微分
  - □加速度 $\ddot{x}$･･･変位 x の2回微分
- $m\ddot{x} = F$ を解けば，運動 $x(t)$ が分かる．

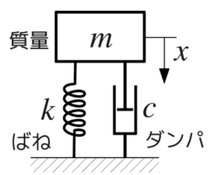
運動
＝変位の時間変化

15

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

自由振動の運動方程式（重力無視）

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



- 導出方法

$$m\ddot{x} = F = -kx - c\dot{x}$$

□$-kx$ … ばねの復元力　∝変位（フックの法則）

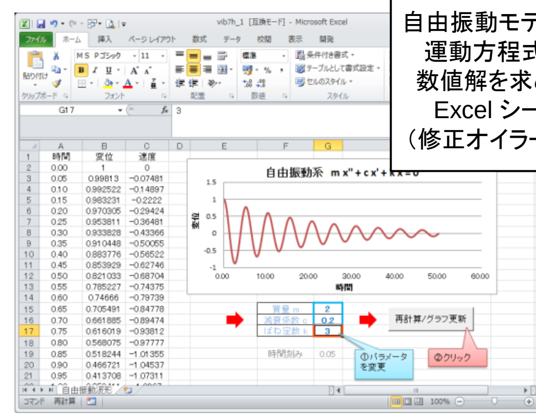
□$-c\dot{x}$ … 減衰力（ブレーキ力）　∝速度

- 機械構造➔(m,c,k)　（測定 or 算定）

16

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習（vib7h_A1.xls）



自由振動モデルの
運動方程式の
数値解を求める
Excel シート
（修正オイラー法）

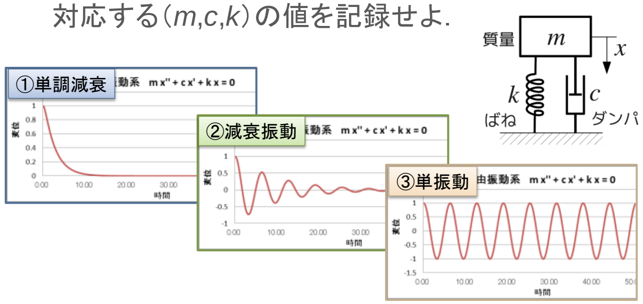
17

課題　(m,c,k)とダイナミクス(動き方)

□(m,c,k)の値を調整し,「再計算」をクリック.

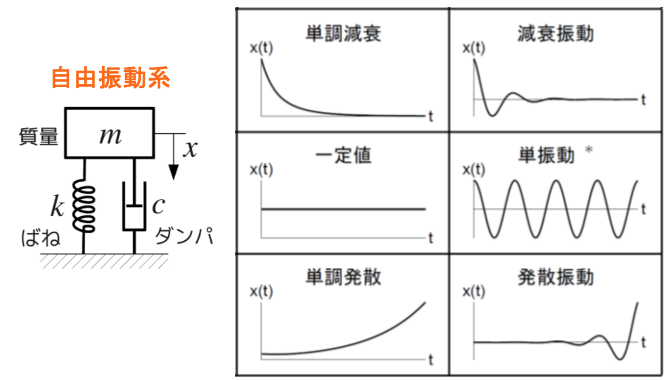
□次の3種類のダイナミクスを求め,

対応する(m,c,k)の値を記録せよ.

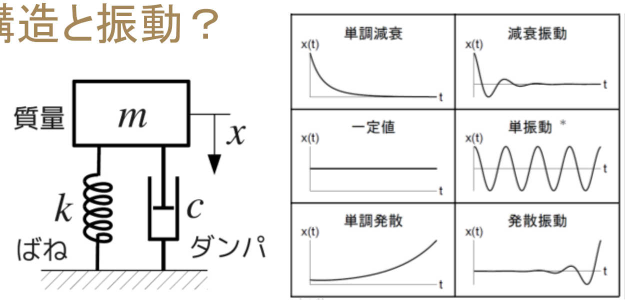


自由振動系のダイナミクス(全パターン)

起りうるダイナミクスは全部で6パターン



構造と振動？



- m = 5.5, c = 3.2, k = 0.8 のときの振動パターンは,
  6種類のどれか？　5秒で選べ！

構造(m,c,k)を見ても,動きは連想困難！ ➔固有値

自由振動の固有値

構造パラメータ		固有方程式	動特性パラメータ「固有値」
m	質量 [kg]	➔	$s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$
k	ばね定数 [N/m]		
c	減衰係数 [Ns/m]		

- 固有値 $s = a \pm bi$　※一般に複素数
- 直接,動き方を表す.　$i \equiv \sqrt{-1}$
  - □固有値の実部 a … 減衰の強さ
  - □固有値の虚部 b … 実際の振動数

固有値とは？

- 自由振動の運動方程式(2階常微分方程式)

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

常微分方程式論

- 解の一般形

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- 指数 s_1, s_2 を「固有値」という.
  - □一般に複素数

c_1, c_2 は初期条件で決まる定数

固有値の求め方

- 自由振動の運動方程式(2階常微分方程式)

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

同じ係数の2次方程式

- 固有方程式

$$ms^2 + cs + k = 0$$

解の公式

- 固有値(一般に複素数)

$$s_1 = \frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}, \quad s_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

実習(vib7h_A2.xls)

- 各シートの振動波形を観察し,
  当てはまる性質をチェック☑せよ.

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ (☐減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☐非振動)

解答例

$$s = \underset{\text{実}}{a} \pm \underset{\text{虚}}{b}i$$

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ (☑減衰 ☐一定 ☐発散)(☐振動 ☑非振動)
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ (☐減衰 ☐一定 ☑発散)(☐振動 ☑非振動)
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ (☐減衰 ☐一定 ☑発散)(☐振動 ☑非振動)
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ (☐減衰 ☑一定 ☐発散)(☑振動 ☐非振動)
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ (☑減衰 ☐一定 ☐発散)(☑振動 ☐非振動)
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ (☐減衰 ☐一定 ☑発散)(☑振動 ☐非振動)

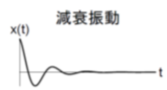
- 固有値の実部・・・(全て－)減衰, (1つでも＋)発散
- 固有値の虚部・・・(≠0)振動, (0)非振動

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

なぜ「$s = -1 \pm 3i$」が減衰振動か？

- 計算による証明
  - □解の一般形
    $x(t) \approx e^{s_1 t} + e^{s_2 t}$ (簡単のため$c_1 = c_2 = 1$)
  - □オイラーの公式
    $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow e^{(-\theta)i} = \cos\theta - i\sin\theta$
  - □複素固有値の代入

$$x(t) = e^{(-1-3i)t} + e^{(-1+3i)t}$$
$$= e^{-t}e^{(-3i)t} + e^{-t}e^{(+3i)t}$$
$$= e^{-t}\{e^{(-3t)i} + e^{(+3t)i}\} = e^{-t}\{2\cos 3t\}$$



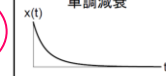
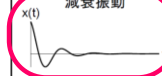
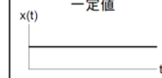
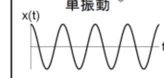
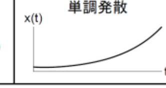
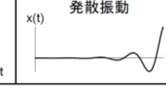
26

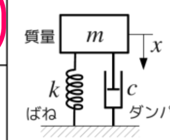
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

➔固有値の使い方（参考資料14頁，表4.1）

- 固有値 $s = -0.29 \pm 0.25i$ のときの振動パターンは，6種類のどれか？ 5秒で選べ！

即答可能！

実部 a の符号	固有値 $a \pm ib$	虚部 b の有無: $b = 0$ (非振動)	虚部 b の有無: $b \neq 0$ (振動)
	$a < 0$ (減衰・安定)	単調減衰 	減衰振動 
	$a = 0$ (一定・中立)	一定値 	単振動 * 
	$a > 0$ (発散・不安定)	単調発散 	発散振動 



27

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

「自由振動と固有値」のまとめ

- 運動方程式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$
  ➔ $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$
- 固有方程式 $ms^2 + cs + k = 0$
  ➔ 固有値 $s_i = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$
- 固有値「$s = a \pm bi$」の使い方

実部 a 虚部 b

指数減衰率 $x(t) \approx e^{at}\cos bt$ 振動数

28

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習（vib7h_A3.xls）

- 固有値を求め，ダイナミクスを予測，検証せよ．
  1. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ ※2個の実数
  2. $\ddot{x} + 9x = 0$ ※純虚数
  3. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$ ※複素数
- 手順
  - ① (m,c,k)を変更して，固有値を求める．
  - ② 前頁の表と照合して「予測」
  - ③ シミュレータ「vib7h_A1.xls」を動かし「検証」

29

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第3講
減衰比と固有振動数

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

30

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

学習目標

- 自由振動モデルの標準形
  - □ $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ のパラメータを2個に集約
  - □ 固有値を見やすく工夫する.
    ➔ 減衰比 ζ,　固有振動数 ω_n
- 減衰比
  - □ 振動パターンの整列
- 固有振動数
  - □ 自由振動の振動数 ≠ 固有振動数
  - □ 相似倍率 ω_n

31

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

標準形　1/2

- 自由振動の運動方程式（2階常微分方程式）

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0}$$

- m で割る　（$C\equiv c/m$,　$K\equiv k/m$ ）

$$\boxed{\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=0}$$

- 固有値　$s=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4K}}{2}$
  - □ $\sqrt{2\text{個のパラメータ}}$ を $\sqrt{1\text{個のパラメータ}}$ にしたい

32

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

標準形　2/2

- 変数変換の導入　$C=2\zeta\omega_n$,　$K={\omega_n}^2$

標準形 $\boxed{\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+{\omega_n}^2x=0}$

- 固有値は, $s=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n$

固有値のパターンが, ζ にしか依存しなくなった！

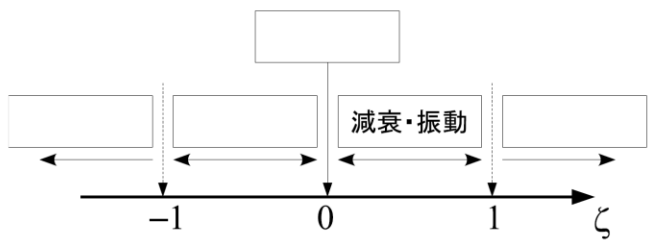
- $\omega_n\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$ を「固有振動数」という.
- $\zeta\equiv\frac{c}{2\sqrt{mk}}$ を「減衰比」という.

33

《減衰比 ζ 》ダイナミクスの整列

- 課題：空欄を埋めよ！

　《ヒント》固有値 $s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$



《減衰比 ζ 》ダイナミクスの分類名

減衰比の値	分類名	オーバーシュート
$\zeta = 0$	無減衰 (undamped)	有
$0 < \zeta < 1$	不足減衰 (under-damping)	有
$\zeta = 1$	臨界減衰 (critical-damping)	無し　※ぎりぎり
$1 < \zeta$	過減衰 (over-damping)	無し

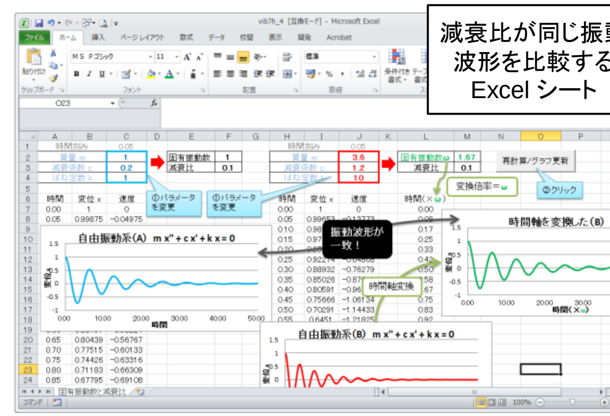
振動波形との対応関係

- 減衰比が等しい　⇔　振動波形が相似
  - 減衰比が等しい振動は，振動波形を縦横に伸縮させると互いに重なる （縦横比は一般に ≠1）
- 固有振動数　＝　時間軸方向の相似倍率
  - 固有値 $s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \equiv A_\pm \omega_n$
  - 振動波形 $x(t) \approx e^{(A_- \omega_n)t} + e^{(A_+ \omega_n)t}$
  $= e^{A_-(\omega_n t)} + e^{A_+(\omega_n t)}$

時間軸の伸縮
$T \equiv \omega_n t$

➔ $x(T) \approx e^{A_- T} + e^{A_+ T}$ に相似な波形となる．

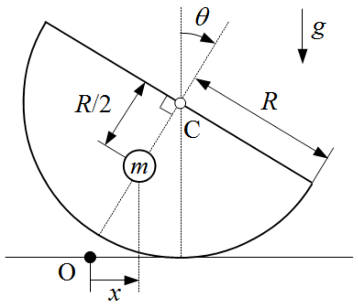
実習（vib7h_A4.xls）



減衰比が同じ振動波形を比較する Excel シート

例題

- 次の「起上り小法師」の固有振動数を求めよ.



《仮定》滑らずに転がる. その他の摩擦等は無視する.

ヒント: θが小さいとき運動方程式は,

$$\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{mgR}{2}\theta = 0$$

解答例

- 運動方程式 $\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{mgR}{2}\theta = 0$
- 標準形「$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + {\omega_n}^2\theta = 0$」に変形
  - 加速度 $\ddot{\theta}$ の係数で割る.

    $\ddot{\theta} + 0\dot{\theta} + \frac{2g}{R}\theta = 0$
  - 標準形と比較

    $\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ (固有振動数)

    $\zeta = 0$ (減衰比)

《実際のハードル》
運動方程式の入手方法！
自分で立てんのは, ふつう無理でしょ. 論外でしょ？
➔次回, 乞うご期待

減衰振動の振動数 ≠ 固有振動数

- 自由振動は(ほとんど)固有振動数で揺れない！
  - 固有値 $s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$
  - 減衰振動(不足減衰) $0 < \zeta < 1$

    ➔ $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{マイナス} = i\sqrt{1-\zeta^2}$

    ➔固有値 $s = \underline{-\zeta\omega_n} \pm i\left(\underline{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

実部 a 　虚部 b

指数減衰率 　$x(t) \approx e^{at}\cos bt$ 　振動数

《例》$\zeta = 0.5$ ➔ 減衰振動数 $= \omega_n\sqrt{0.75} \approx 0.87\omega_n$

「減衰比と固有振動数」のまとめ

- 減衰比が同じ振動 ➔ 振動波形が相似
  - 時間軸の相似倍率＝固有振動数
- 減衰振動は固有振動数では揺れない
  - 固有振動数＝減衰0(単振動)のときの振動数
  - 減衰(比)増大 ➔ 振動数＝ $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 減少

☆ 現実の振動系(減衰あり)は,
固有振動数より遅く揺れる！