

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Excelで学ぶ振動基礎(7時間)

第5講 強制振動と共振

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※教材のダウンロード
→ <http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/>

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

学習目標

- 強制振動
 - インパルス外力, ステップ外力
 - 調和外力(正弦波状外力)
- 共振
 - 実験, シミュレーション
- 過渡応答と定常応答

2

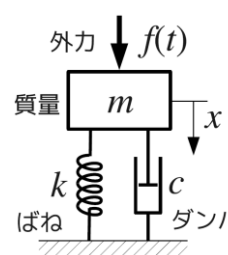
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

強制振動

3

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

強制振動モデル (1自由度線形強制振動系)



外力 $f(t)$

質量 m

ばね k

ダンパ c

変位 x

状態量 x 変位 [m]

パラメータ m 質量 [kg]

k ばね定数 [N/m]

c 減衰係数 [Ns/m]

外力(外乱) $f(t)$ 外力 [N]

- 強制振動系 = 自由振動系 + 外力 $f(t)$
- 運動方程式 (重力無視)

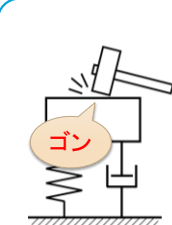
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

4

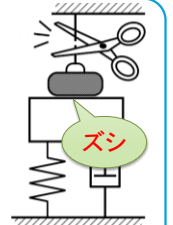
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

外力の種類(テスト入力) 1/2

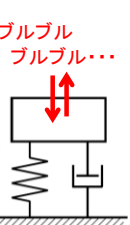
■ 現実の外力は、これらとは違う。(単純化)



インパルス外力



ステップ外力



調和外力

自由振動と等価
∴ 固有値で6パターン解明

調和＝
正弦波状

5

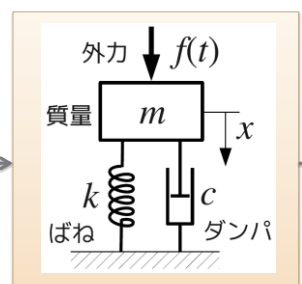
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《用語》〇〇応答

入力
外力
外乱

$f(t)$

外力 $f(t)$



$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

$x(t)$

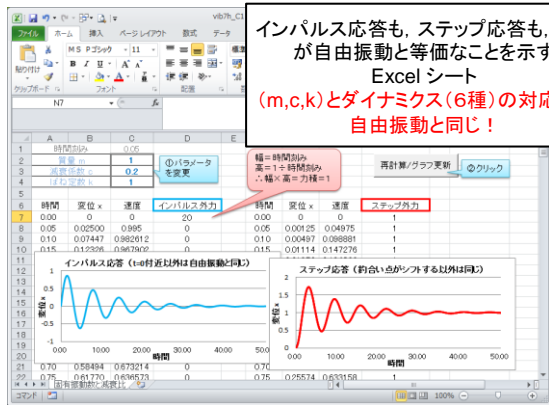
応答

■ 〇〇外力に対する応答 → 〇〇応答
□ インパルス応答, ステップ応答, 調和応答, etc

6

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習(vib7h_C1.xls)



インパルス応答も、ステップ応答も、動きが自由振動と等価なことを示す Excel シート

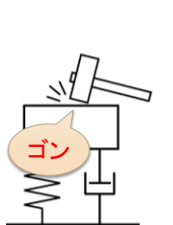
(m,c,k)とダイナミクス(6種)の対応は、自由振動と同じ！

7

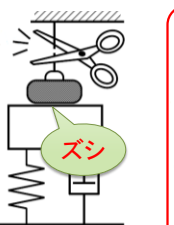
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

外力の種類(テスト入力) 2/2

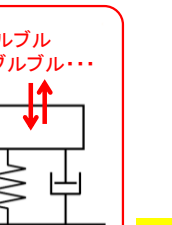
■ 現実の外力は、これらとは違う。(単純化)



インパルス外力



ステップ外力



調和外力

調和＝
正弦波状

何が起るか？
強制振動特有の「共振」が発生

8

共振(実験)

9

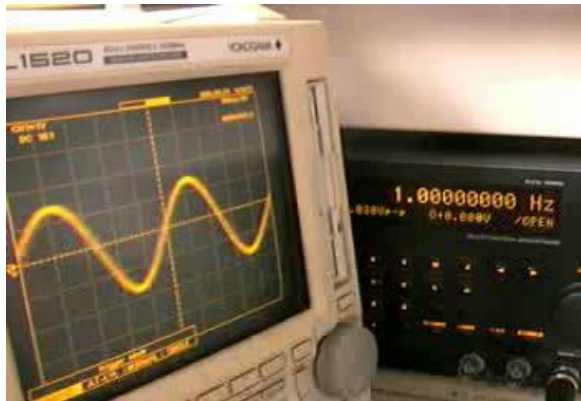
モータ・振り子系

- 強制振動に特有な現象に、共振がある。
- 実験方法：
 - ① モーターに振り子を接続。
 - ② 交流電圧をかける。
 - ③ 振り子の振幅を観察。



10

入力電圧一定, 周波数を変化



11

自由振動

電源OFFでは
減衰振動



12

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

共振現象(前半)

周波数を1Hzから増加



13

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習

- さらに周波数を増すと、振り子の振幅はどうか？
- まわりと議論して、予想せよ。

14

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

共振現象(後半)

周波数をさらに増加



15

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習

- 振幅の変化(通し)を観察し、グラフを描け。
 - 横軸・・・周波数(1Hz～2.5Hz)
 - 縦軸・・・振幅
- 得られたグラフを **共振曲線** という。

16

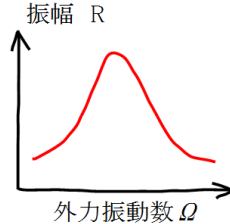
共振現象(通し)

周波数
1Hz~2.5Hz



17

解答例



振幅 R

外力振動数 Ω

ゲイン線図
(共振曲線)

18

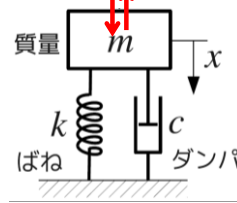
共振(シミュレーション)

19

調和外力を受ける振動モデル

調和＝
正弦波状

ブルブル
ブル... $f(t) \equiv A \cos(\Omega t)$ ※sin でもよい



質量 m

ばね k

ダンパ c

変位 x

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \cos \Omega t$$

m	質量 [kg]
k	ばね定数 [N/m]
c	減衰係数 [Ns/m]
A	調和外力の片振幅 [N]
Ω	調和外力の角振動数 [rad/s]

■ この単純モデルで共振は再現するか？

20

実習 (vib7h_C2.xls)

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

課題
 試行錯誤的に Ω を変化させ、
 振幅が最大となる Ω を求めよ。

21

振幅と位相差

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

課題
 Ω を変化させて波形を観察し、振幅と位相差のグラフ(横軸 Ω)を、大雑把にスケッチせよ

22

解答例

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

23

過渡応答と定常応答 1/2

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《力学法則》調和応答の成分
 = バタツキ成分(→0) + 正弦波成分!

24

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

調和応答の安定性

= バタツキ成分($\rightarrow 0$) + 正弦波成分!

自由振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ と同じ解	強制振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \cos \Omega t$ に特有の特解
--	--

過渡応答 定常応答

時間→

自由振動

外力による振動

安定な強制振動

時間→

自由振動

外力による振動

不安定な強制振動

25

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

過渡応答と定常応答 2/2

調和応答 = バタツキ($\rightarrow 0$) + 正弦波成分!

自由振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ と同じ解 狭義の過渡応答	強制振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \cos \Omega t$ に特有の特解 定常応答
---	--

■ 解析方法

- 過渡応答 ... $f(t) = 0$ のときの固有値を調べる
- 定常応答 ... ゲイン線図と位相線図(ボード線図)を調べる → 周波数応答という。

26

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

「強制振動」のまとめ

- 強制振動
 - インパルス応答, ステップ応答は自由振動と同じ
 - 調和応答には「共振」が起こる
- 過渡応答と定常応答
 - 調和応答
 - = 自由振動成分 + 強制振動成分(正弦波)

27

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Excelで学ぶ振動基礎(7時間)

第6講

周波数応答

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※教材のダウンロード
→ <http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/>

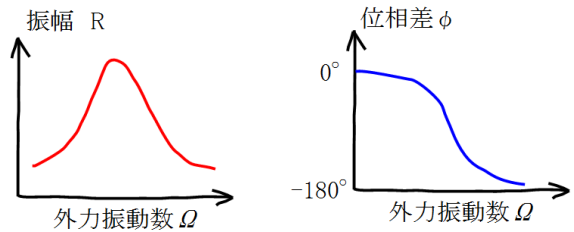
28

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

学習目標

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \cos \Omega t$$

■ 振幅 $R(\Omega)$ と位相差 $\phi(\Omega)$ を式で求める！



振幅 R

位相差 ϕ

外力振動数 Ω

外力振動数 Ω

29

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

周波数応答解析の手順

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

- ① 外力を仮定 $f(t) \equiv \cos \Omega t$
- ② 応答を仮定 $x(t) \equiv R \cos(\Omega t + \phi)$
- ③ 運動方程式に代入して, R, ϕ を求める
2つ合わせて
周波数応答という

■ ふつうに代入すると, ϕ の扱いが面倒
→ 複素数の活用が一般的

30

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

複素数とオイラーの公式

数学的な準備

31

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

高校レベルの複素数

- ① $i \equiv \sqrt{-1}$ を虚数単位という. $i^2 = -1$
- ② $z = a + bi$ を複素数という (a, b は実数)
- ③ a を実部と呼び, $\text{Re}[a + bi]$ と書く
- ④ b を虚部と呼び, $\text{Im}[a + bi]$ と書く
- ⑤ $a + bi = c + di \iff a = c$ かつ $b = d$
- ⑥ $(a + bi) + (c + di) \equiv (a + c) + (b + d)i$
- ⑦ $\overline{a + bi} \equiv a - bi$ を $a + bi$ の共役という

32

練習問題

1. 複素数の積 $(a + bi)(c + di)$ を求めよ
2. $\text{Re}[p]$ を求めよ
3. $\text{Im}[p]$ を求めよ
4. p の共役を求めよ

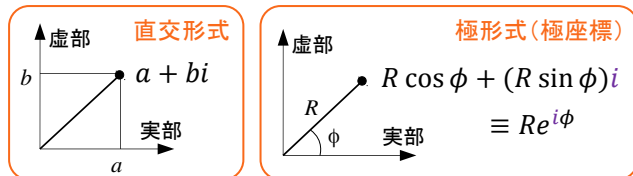
33

解答例

1. 複素数の積 $p = (a + bi)(c + di)$ を求めよ
 $\square (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
2. $\text{Re}[p]$ を求めよ
 $\square = ac - bd$
3. $\text{Im}[p]$ を求めよ
 $\square = bc + ad$
4. p の共役を求めよ
 $\square \bar{p} = (ac - bd) - (bc + ad)i$

34

大学レベルの複素数(極座標)



- $\square R = \sqrt{a^2 + b^2}$ を「絶対値」と呼び、 $|a + bi|$ と書く
- $\square \phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ を「偏角」と呼び、 $\angle(a + bi)$ と書く

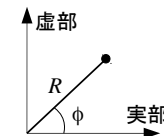
- 四則演算や微積分が指数関数と同じなので、 $\text{Re}^{i\phi} \equiv R(\cos \phi + i \sin \phi)$ と表記 オイラーの公式

35

練習問題

1. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ を「極形式」に書き直せ
2. $z = 2e^{(\frac{\pi}{3})i}$ を「直交形式」に書き直せ

ヒント: 図を描いて考える!



36

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

解答例

1. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ を「極形式」に書き直せ

□ $R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$

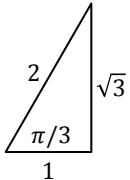
□ $\phi = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

∴ $z = 4e^{(\frac{\pi}{3})i}$

2. $z = 2e^{(\frac{\pi}{3})i}$ を「直交形式」に書き直せ

□ $= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$

オイラーの公式



37

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

周波数応答の計算

38

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

運動方程式への複素数の代入？

■ 線形振動系では、実部と虚部は混じらない！

□ 外力 $f \equiv f_a + f_b i$, 応答 $x \equiv x_a + x_b i$

□ $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$ に代入

→ $m(\ddot{x}_a + \ddot{x}_b i) + c(\dot{x}_a + \dot{x}_b i) + k(x_a + x_b i) = f_a + f_b i$

→ $(m\ddot{x}_a + c\dot{x}_a + kx_a) + (m\ddot{x}_b + c\dot{x}_b + kx_b)i = f_a + f_b i$

∴ 次の2連立と等価

$$\begin{cases} m\ddot{x}_a + c\dot{x}_a + kx_a = f_a \\ m\ddot{x}_b + c\dot{x}_b + kx_b = f_b \end{cases}$$

39

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

周波数応答の計算 (複素数活用) 1/3

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

① 入力 $f(t) \equiv e^{(\Omega t)i} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t$

② 応答 $x(t) \equiv R e^{(\Omega t + \phi)i}$
 $= R \cos(\Omega t + \phi) + i R \sin(\Omega t + \phi)$

■ 代入すると、実部・虚部は混じらないので、

	実部では	虚部では
外力 $f(t) \equiv$	$\cos \Omega t$	$\sin \Omega t$
応答 $x(t) \equiv$	$R \cos(\Omega t + \phi)$	$R \sin(\Omega t + \phi)$

cos型・sin型の計算が同時進行してくれる！

40

周波数応答の計算 (複素数活用) 2/3

③ 運動方程式へ代入

$$\begin{aligned} \square x(t) &\equiv R e^{(\Omega t + \phi)i} = R e^{(i\Omega)t + i\phi} = R e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} \\ &\rightarrow \dot{x}(t) = R i \Omega e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} \\ &\rightarrow \ddot{x}(t) = R (i\Omega)^2 e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} = -R \Omega^2 e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} \\ \square m \ddot{x} + c \dot{x} + kx &= -m R \Omega^2 e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} + c R i \Omega e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} + k R e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} \\ &= R \{(k - m \Omega^2) + (c \Omega) i\} e^{(i\Omega)t} e^{i\phi} = f(t) = e^{(i\Omega)t} \\ \therefore R e^{i\phi} &= \frac{1}{(k - m \Omega^2) + (c \Omega) i} \end{aligned}$$

41

周波数応答の計算 (複素数活用) 3/3

$$R e^{i\phi} = \frac{1}{(k - m \Omega^2) + (c \Omega) i} \quad \leftarrow \text{複素振幅という}$$

④ 右辺→極形式

$$\begin{aligned} \text{分母} &= (k - m \Omega^2) + (c \Omega) i \\ &= \sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2} e^{i \left(\tan^{-1} \frac{c \Omega}{k - m \Omega^2} \right)} \\ \therefore R e^{i\phi} &= \frac{1}{\text{分母}} = \frac{1}{\sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}} e^{i \left(-\tan^{-1} \frac{c \Omega}{k - m \Omega^2} \right)} \end{aligned}$$

⑤ 周波数応答

$$\begin{cases} R(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}} & (\text{振幅比}) \\ \phi(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{c \Omega}{k - m \Omega^2} & (\text{位相差}) \end{cases}$$

42

3つの基本振動数 (通説にご用心)

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = f(t)$$

自由振動 $f(t) = 0$	固有振動数	ω_n	大
	減衰振動の振動数	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$	中
強制振動 $f(t) = A \cos \Omega t$	共振点 $\Omega = \omega_p$ (共振曲線のピーク)	$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$	小

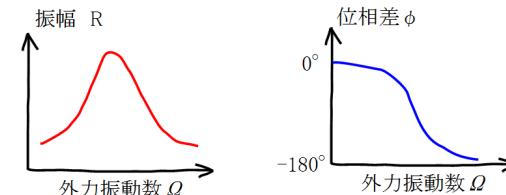
- 通説1...外力がないと固有振動数で揺れる
- 通説2...共振は $\Omega = \omega_n$ (固有振動数) で起こる
- 通説3...共振は $\Omega = \omega_d$ (減衰振動数) で起こる

減衰があると ($\zeta \neq 0$), これら通説は全て嘘!

43

「周波数応答」のまとめ

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = A \cos \Omega t$$



$$R(\Omega) = \frac{A}{\sqrt{(k - m \Omega^2)^2 + (c \Omega)^2}} \quad \phi(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{c \Omega}{k - m \Omega^2}$$

※ $A = 1$ で計算したので A 倍

→ 実習あり

44

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

実習(vib7h_C3.xls)

課題

「ゲイン線図と位相線図」の $A \cdot R(\Omega)$ の値と、シート「調和応答」の最大振幅を比較して、検算せよ。

※「調和応答」の誤差は、時間刻みによる

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data in the table:

ω	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	質量 m	1					
3	減衰係数 c	0.2					
4	ばね定数 k	1					
5	共振電圧 Δ	0.7					
6							
7	振動数 ω	0.005					
8	共振電圧 Δ	cQ	k-mQ ²	R(Q)	A=R(Q)	φ(Ω)	
9	0.01	0.002	1.000	1.00010	0.70007	-0.00000	
10	0.015	0.003	1.000	1.00022	0.70015	-0.00000	
11	0.02	0.004	1.000	1.00039	0.70027	-0.00000	

The graphs show the magnitude response (A * R(Ω)) and the phase response (φ(Ω)) as functions of frequency (Ω). The magnitude response is a peak at ω = 0.01, and the phase response is a step function at ω = 0.01.