

Excelで学ぶ振動基礎(7時間)

第7講

非線形振動ほか

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※教材のダウンロード

→ <http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/>

学習目標

- 非線形振動（ガタ系を例に）
 - 初期値依存性（異なる初期値 → 異なる状態）
 - 跳躍現象と履歴現象
- 連成振動
 - 動吸振器

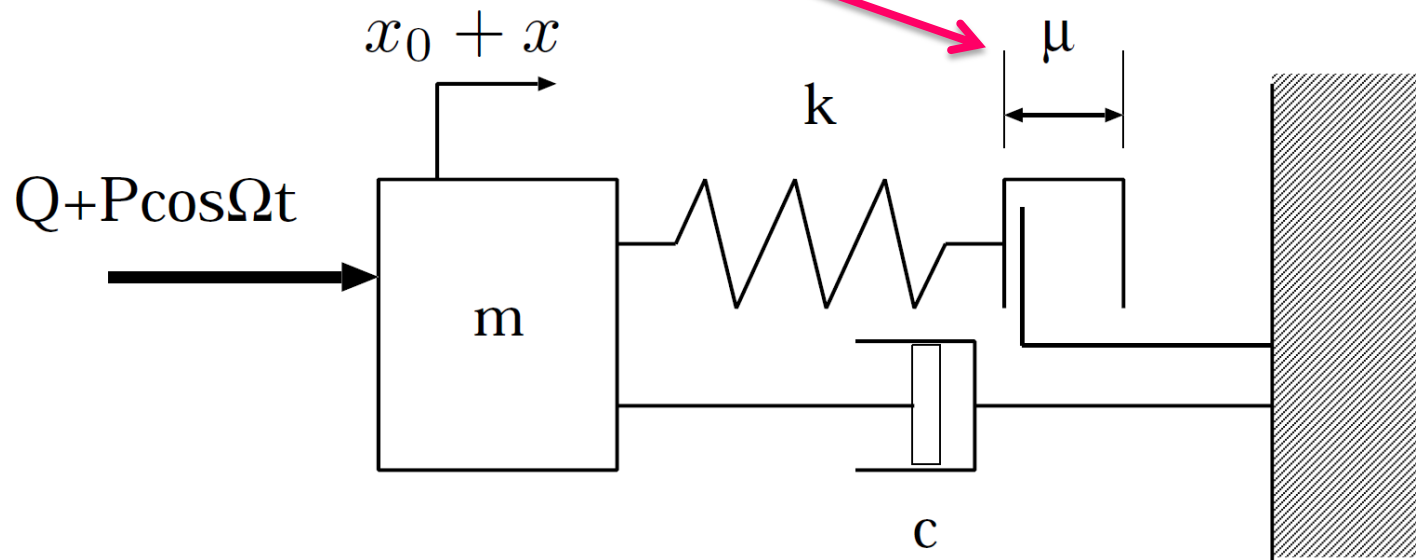
運動方程式が1次式で書けない系の振動

非線形振動

ガタのある振動系

※参考文献(A)64頁

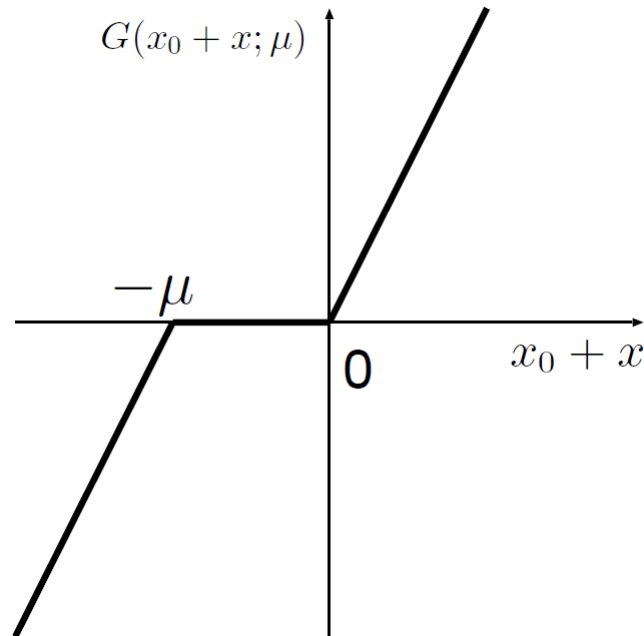
- 機械的なクリアランス (歯車, はめあい, etc)



$$\ddot{x} + c\dot{x} + kG(x_0 + x; \mu) = Q + P \cos \Omega t$$

不感帯ばね特性(ガタのモデル)

■ 区分線形関数



$$G(x_0 + x; \mu) = \begin{cases} G_1(x_0 + x) = x_0 + x & (x_0 + x \geq 0) \\ G_2(x_0 + x) = 0 & (-\mu < x_0 + x < 0) \\ G_3(x_0 + x) = (x_0 + x) + \mu & (x_0 + x \leq -\mu) \end{cases}$$

初期値依存性

- 非線形振動系には、同一のパラメータ条件下に、複数の定常状態が、共存しうる。
 - 線形振動系では、あるパラメータ条件で発生する定常状態は1つだけ。
- どの状態が選ばれるかは、初期値による。
 - この性質を「初期値依存性」という。
 - 線形振動系では、初期値により、過渡状態は変わるが、定常状態は変わらない。

実習 (vib7h_D1.xls)

課題

「変位 x の初期値」だけ
を変更し，定常応答の
振幅を3種類求めよ。そ
の値を記録せよ。

※計算誤差で値は若干ばらつく

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

時間	変位 x	速度	$Q+P \sin(\Omega t)$
0.00	0	1.00000	0.30000
0.10	0.09990	0.99300	0.30739
0.20	0.19864	0.97681	0.31475
0.30	0.29530	0.95160	0.32202
0.40	0.38900	0.91764	0.32917
0.50	0.47887	0.87528	0.33616
0.60	0.56410	0.82492	0.34296
0.70	0.64391	0.76709	0.34951

Annotations in the image:

- ①初期値を変更 (Change initial value) points to the cell containing "変位 x の初期値" (Initial displacement x) with a value of 0.
- ②クリック (Click) points to the "再計算/グラフ更新" (Recalculate/Update graph) button.
- The resulting steady-state amplitude is shown as "定常応答の振幅" (Steady-state response amplitude) with a value of 1.13.

The graph shows the displacement x over time, with the title "調和外力を受けるガタ系の応答" (Response of a loose system to a modulated external force).

なんだか実験の再現性が悪い?!
 → 《初期値依存性》 + 《確率変動》が原因の1つ

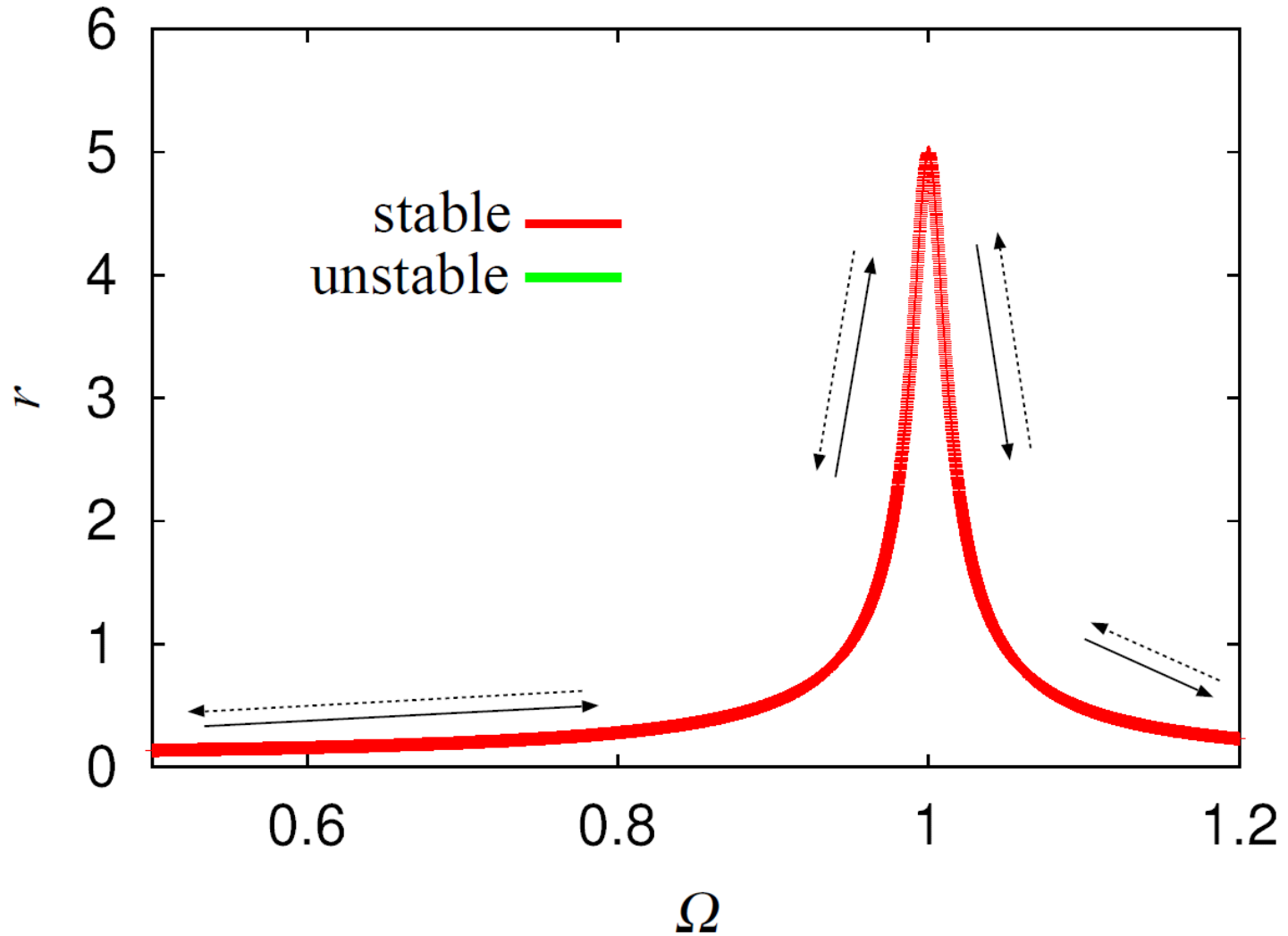
ガタ系の周波数応答

※参考文献(D)

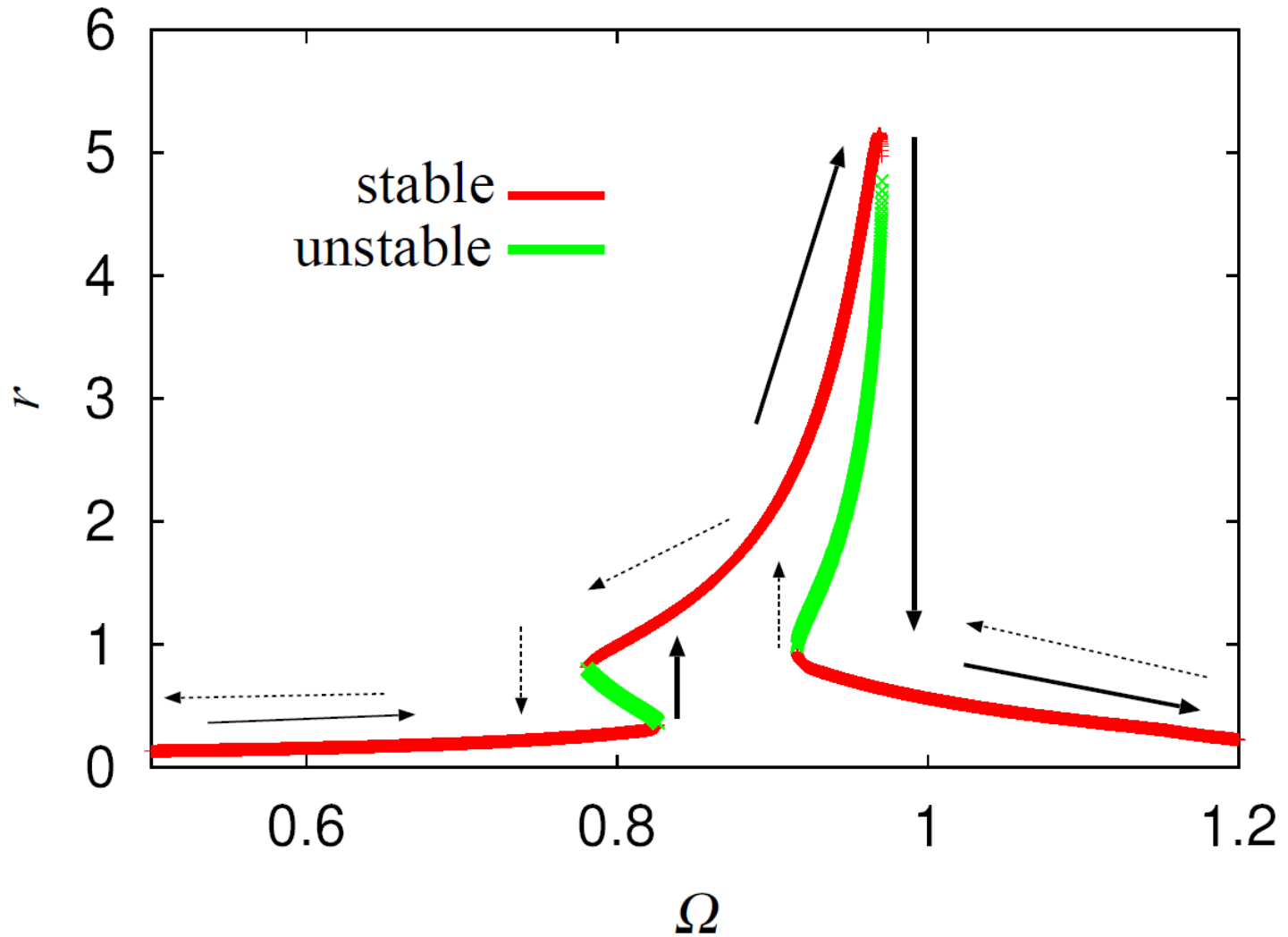
- 平均法による非線形解析
- 吉田研究室(卒研)での計算例
- パラメータ条件

減衰係数 c	0.02
ばね定数 k	1.0
一定外力 Q	0.3
周期外力の振幅 P	0.1
一定外力 Q による初期変位 x_0	0.3

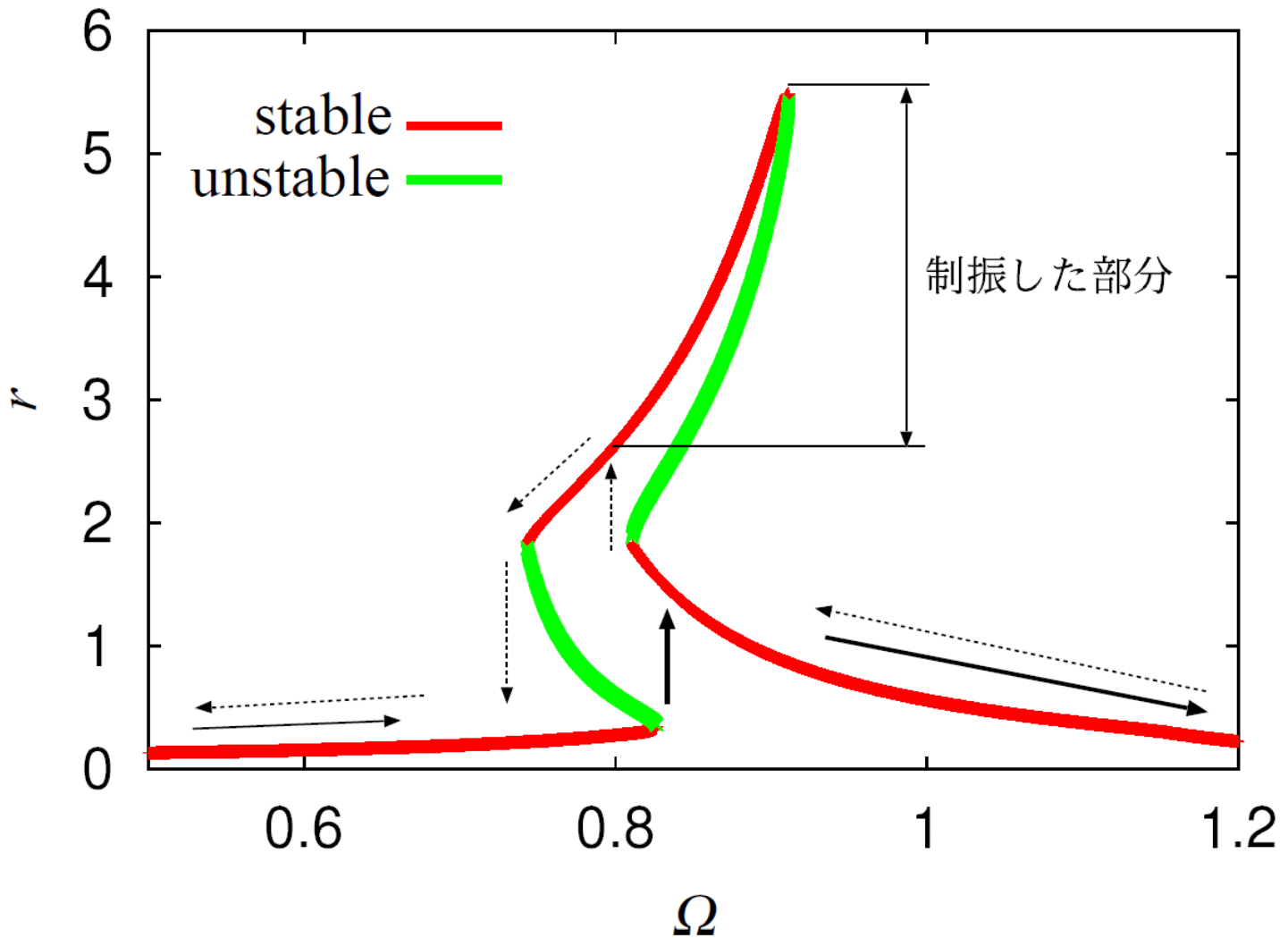
共振曲線 ($\mu = 0$) ガタ無し = 線形振動系



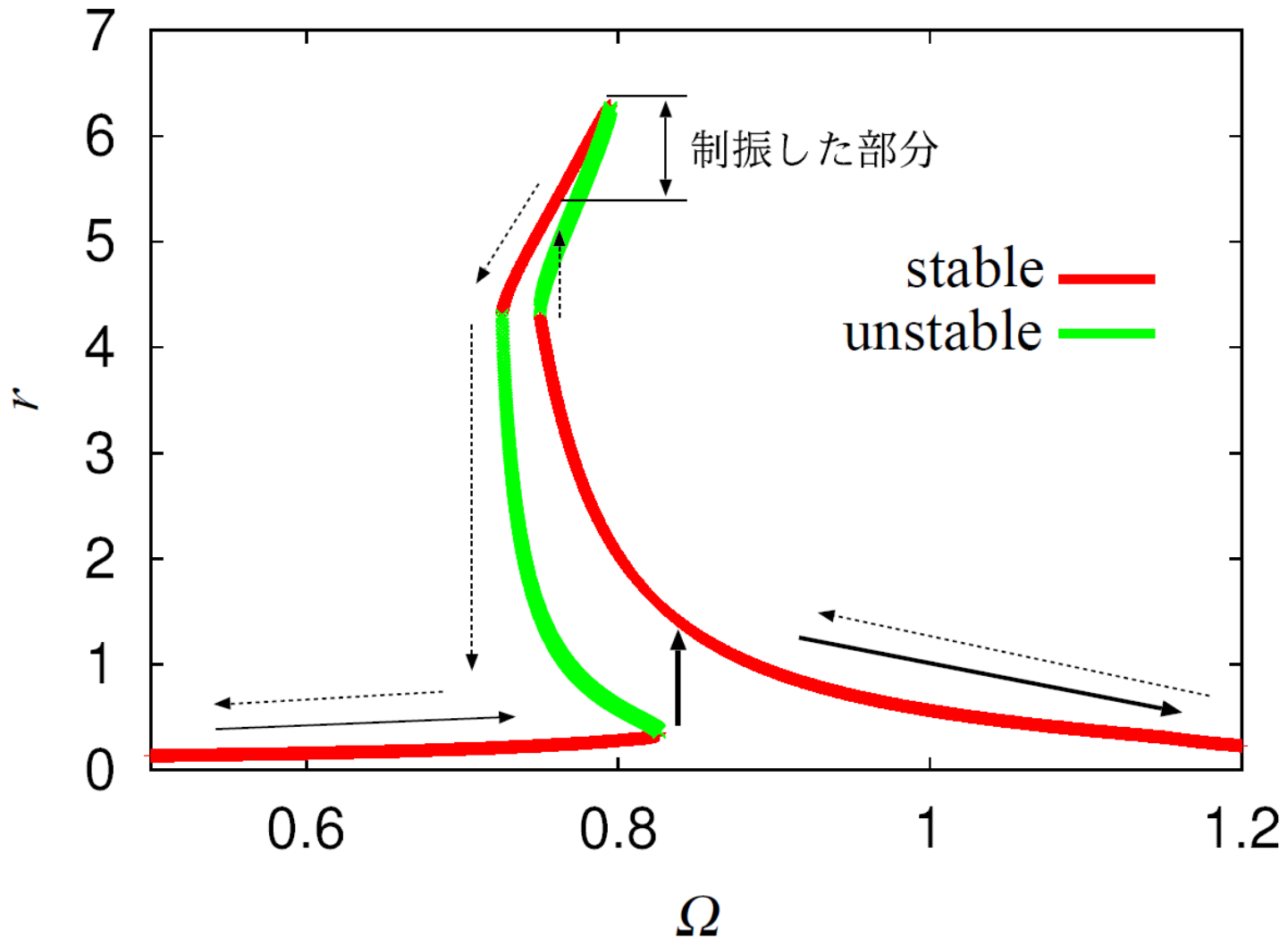
共振曲線 ($\mu = 0.5$)



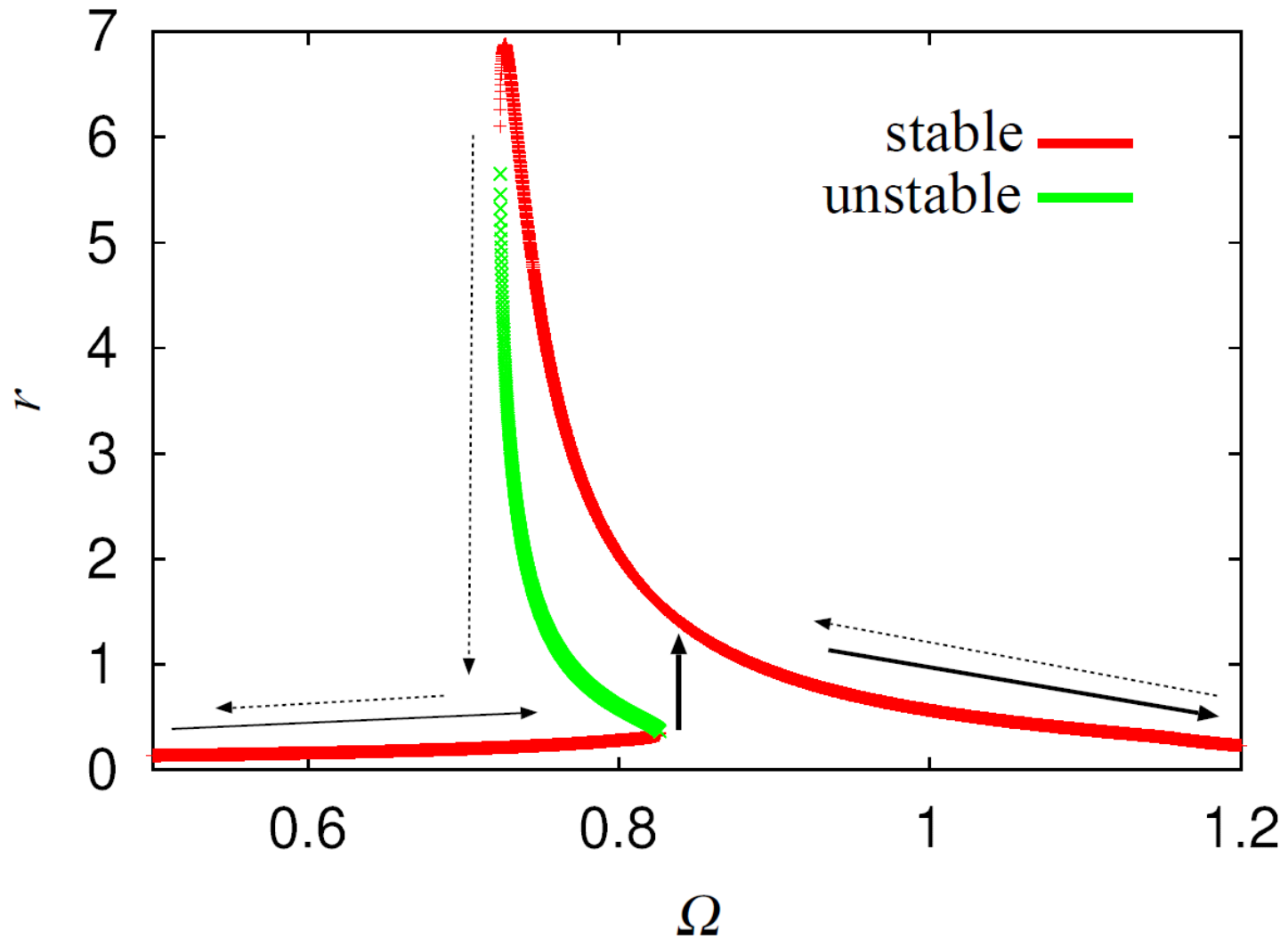
共振曲線 ($\mu = 1.5$)



共振曲線 ($\mu = 4$)



共振曲線 ($\mu = 6.5$)



「非線形振動など」のまとめ

■ 動吸振器

- 振動系の連結により，片方の共振をほぼ消せる.

■ 非線形振動

- 初期値のわずかな変化で，異なる状態が現れる.
 - これを「初期値依存性」という.
 - 《初期値依存性》+《確率変動》で，実験の再現性は容易に悪化する.
- 初期値依存性は，極めて複雑になりうる.
 - 有限精度の制作や運転において，どの定常状態が実現するかは，予測困難になりうる.

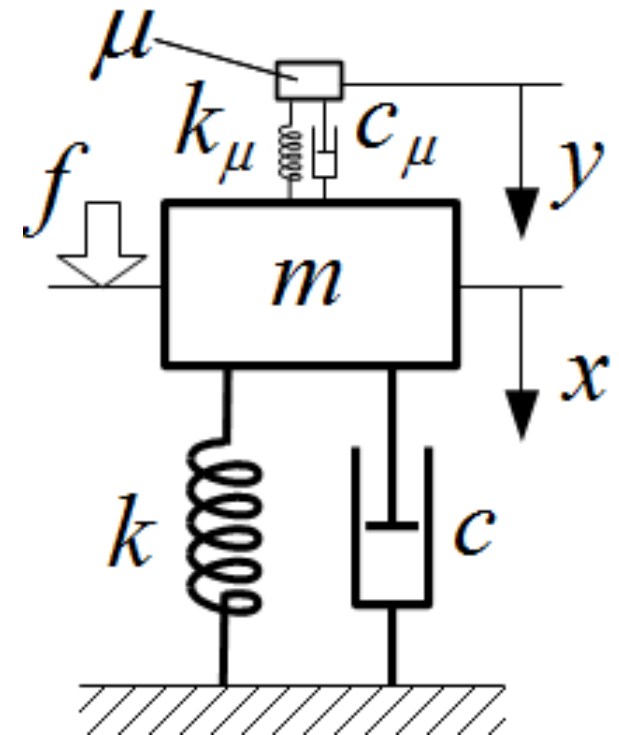
連成振動と動吸振

動吸振器

※参考文献(B)241頁

- 振動系(主系)に動吸振器(小さな振動系)を連結
- 動吸振器の質量 μ , ばね定数 k_μ , 減衰係数 c_μ を調整.

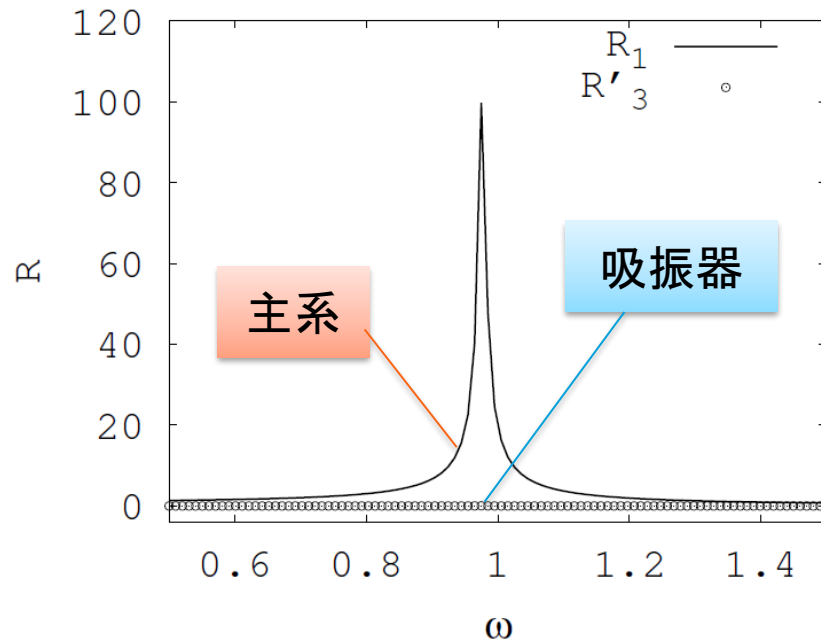
→ 主系の共振がほぼ消える



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - k_\mu(x - y) - c_\mu(\dot{x} - \dot{y}) + f(t) \\ \mu\ddot{y} = k_\mu(x - y) + c_\mu(\dot{x} - \dot{y}) \end{cases}$$

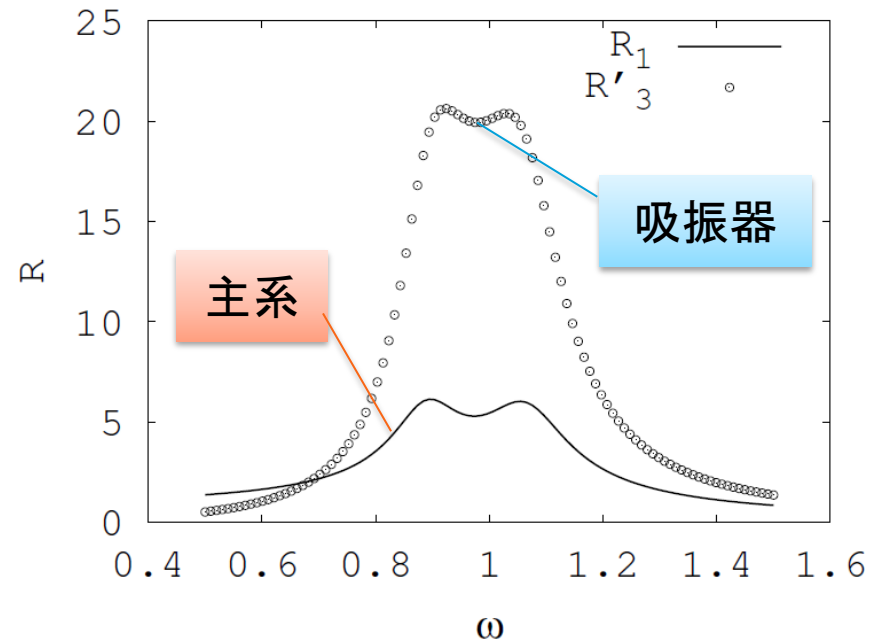
動吸振器の効果（共振曲線）

かたい結合（ほぼ一体）



(a) $c_{\mu} = c, k_{\mu} = 100$

最適な結合 ※文献(B)



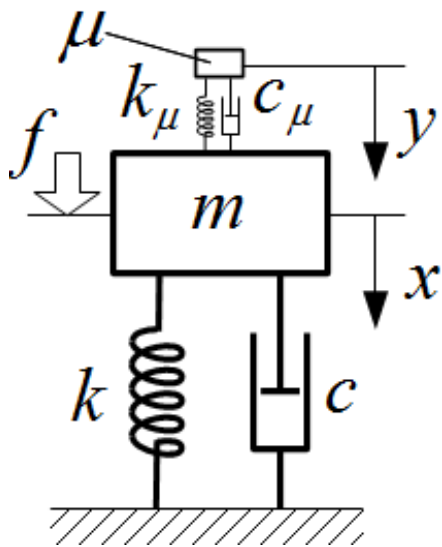
0.0127 0.0454
(b) $c_{\mu} = c_{opt}, k_{\mu} = k_{opt}$

■ $\frac{\mu}{m} = 5\% \rightarrow$ 主系の振幅が, **93.86%** 減少!

動吸振器の設計法

※参考文献(B)(C)など

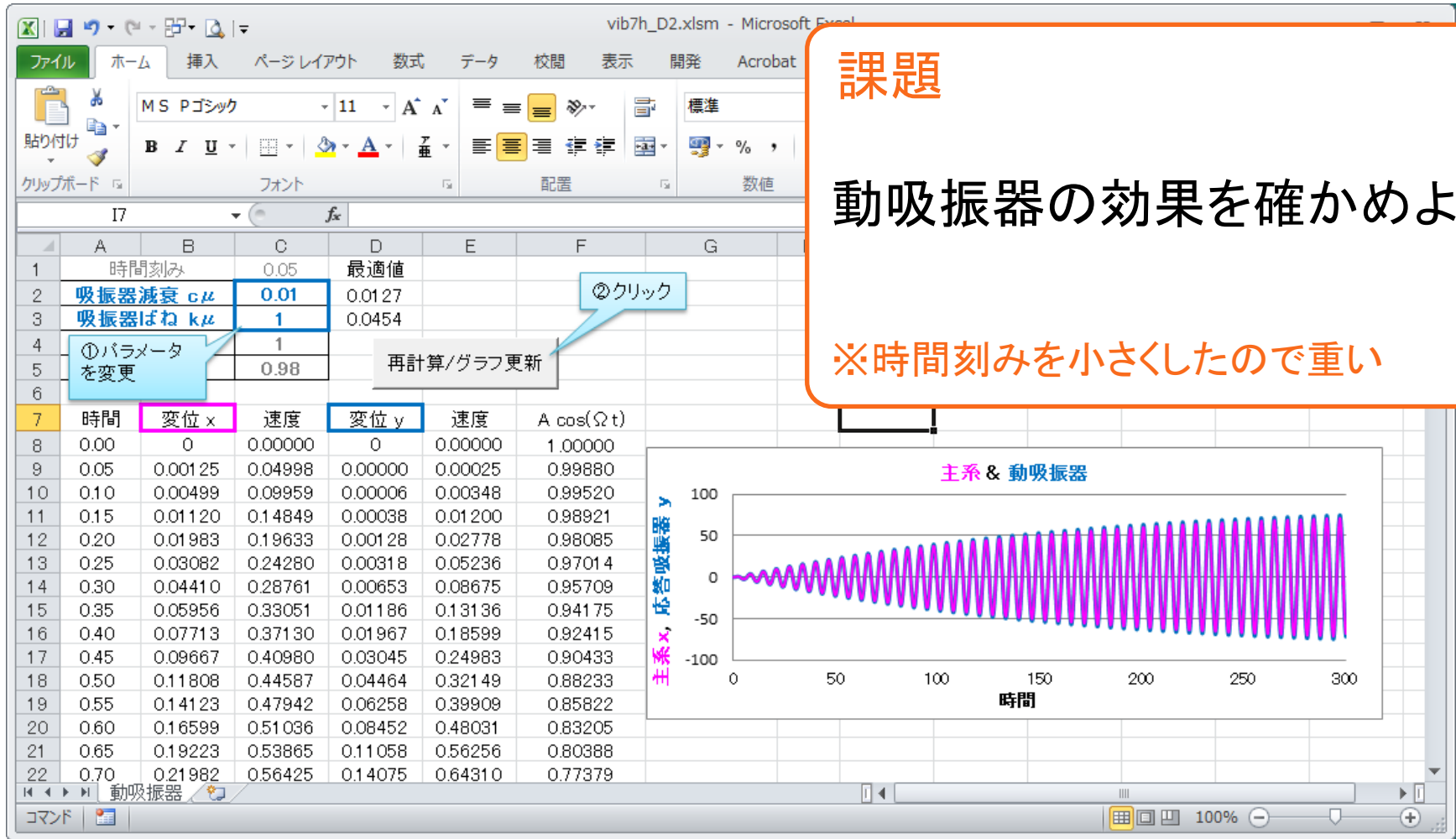
- 厳密解は扱いにくいので、近似式がいくつか提案されている。
- 例えば、次の公式が知られている。



$$k_\mu = k_{\text{opt}} = \frac{k}{m} \cdot \frac{\mu}{(1 + \mu)^2}$$

$$c_\mu = c_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{k_{\text{opt}} \mu^2}{1 + \mu}}$$

実習 (vib7h_D2.xls)



参考文献

- A) 拙著:「動的システム入門」, 日本評論社, 2013年.
<http://edu.katzlab.jp/books/ds>
- B) 山浦弘:「基礎から学ぶ機械力学」, 数理工学社, 2008年.
- C) 松久ほか:「可調整動吸振器による反共振点の定常および過渡応答: 1自由度主振動系モデルでの理論解析」
日本機械学会論文集. C編 56(522), 331-336, 1990年
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110002392107>
- D) 菅原勇太:「ガタによる制振効果について」
平成17年度卒業論文, 宇都宮大学機械システム工学科.