UTSUNOMIYA UNIVERSITY

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第4講
運動方程式の立て方

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

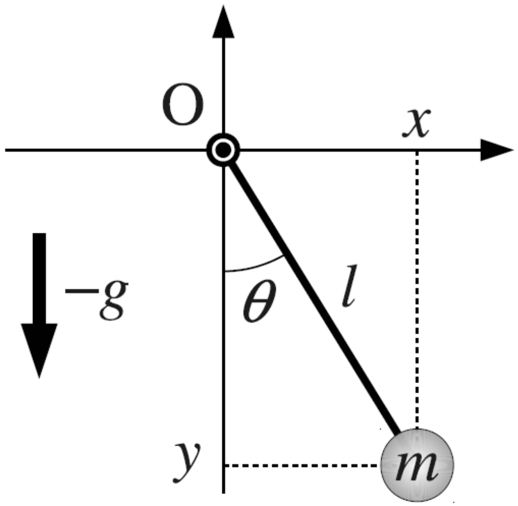
- ニュートン力学の難点
  - ニュートン力学の復習 ➔ 力の釣合いによる立式
  - 解析力学のすすめ ➔ エネルギーによる立式
- 数学的準備（偏微分）
- 解析力学入門
  - 「単振り子」の運動方程式
  - 「起上り小法師」の運動方程式
- 線形化

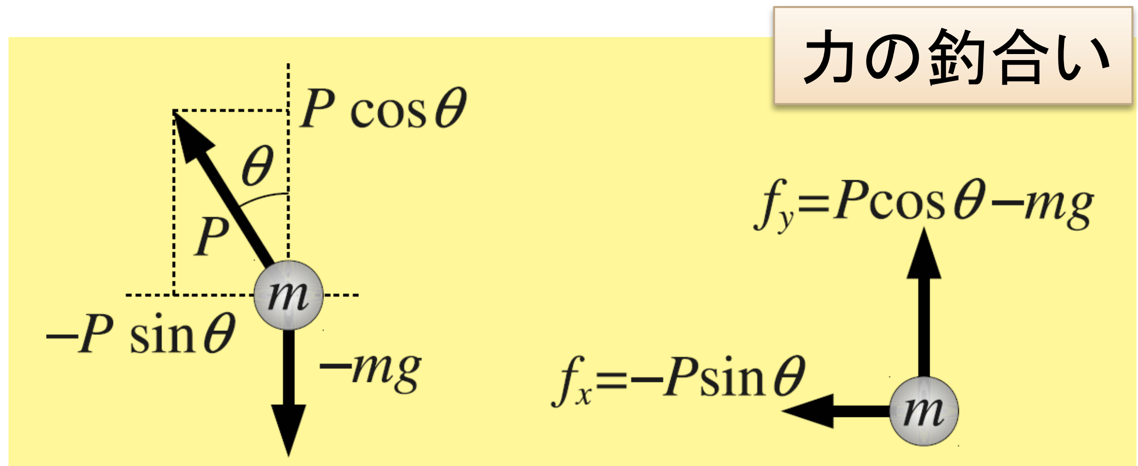
ニュートン力学の難点

ニュートン力学(3法則)

1. 力を受けない物体は，その速度を保つ.
2. 力 $\boldsymbol{f}(t)$ を受けた質量 m の質点の運動 $\boldsymbol{x}(t)$ は，運動方程式「 $m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ 」に従う.
3. 物体 a が b から受ける力 $\boldsymbol{f}_{ab}$ と，物体 b が a から受ける力 $\boldsymbol{f}_{ba}$ について，作用・反作用「 $\boldsymbol{f}_{ab} = -\boldsymbol{f}_{ba}$ 」が成立する.

単振り子(ニュートン力学)

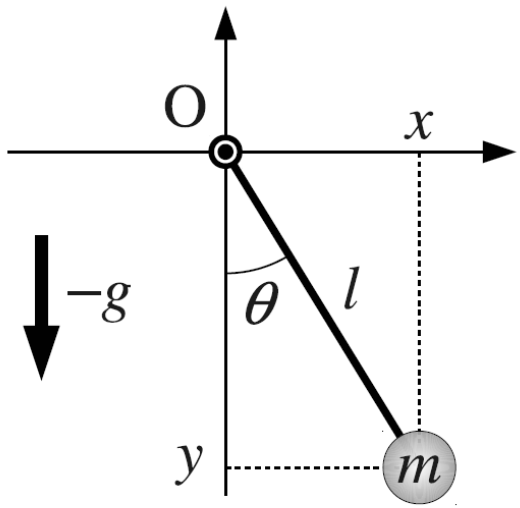




運動方程式 $\begin{cases} m\ddot{x} = -P\sin\theta \\ m\ddot{y} = -P\cos\theta - mg \end{cases}$

- 運動方程式2本 ⇔ 未知数4個 x, y, θ, P
  - 方程式の追加1 … $l = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - 方程式の追加2 … $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

ニュートン力学の難点



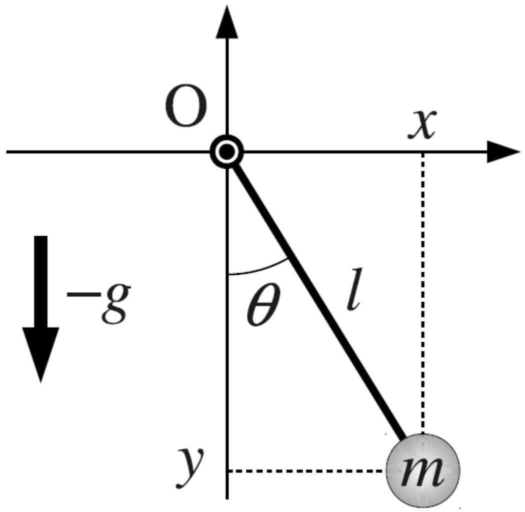
微分代数方程式（4連立）！

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P\sin\theta \\ m\ddot{y} = -P\cos\theta - mg \\ l = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \end{cases}$$

- いかにも解きにくい！
  - 平方根と「±」の処理 ... $y = \pm\sqrt{x^2 - l^2}$ ？
  - 三角関数の消去 ... $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - (\cos\theta)^2}$ ？

➔ 解析力学で解消！

ニュートン力学の反省



機構学的な自由度

機構の姿勢を表すのに，最低限必要な変数の個数

- そもそも，単振り子の姿勢は θ だけで表せた！
  - 運動方程式は θ に関する1本だけあればよい
  - どうせ消去する張力 P を考えるのは無駄だった
- 自由度ぴったりの運動方程式を直接的に得るには？

➔ 解析力学の導入！

高校数学＋α

数学的な準備

微分演算　1/3

- 関数の微分
  - $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
  - $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- 積の微分
  - $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$

例題

$$\frac{d}{dx}\{e^{ax}\sin x\}$$

解答例　1/3

$$\frac{d}{dx}\{e^{ax}\sin x\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{e^{ax}\}\sin x + e^{ax}\frac{d}{dx}\{\sin x\}$$

$$= ae^{ax}\sin x + e^{ax}\cos x$$

$$= e^{ax}(a\sin x + \cos x)$$

微分演算　2/3

- 合成関数の微分
  - $$\frac{df\left(x(t)\right)}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx(t)}{dt}$$ (チェーンルール)

例題　※あとで使う

$$y(t) = \sin\left(\theta(t)\right)$$ の $$\frac{dy}{dt}$$

解答例　2/3

$$\frac{d\sin\left(\theta(t)\right)}{dt} = \frac{d\sin(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt} = \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \cos(\theta)\,\dot{\theta}$$

記法

時間微分 $\frac{d\theta}{dt}$ を，よくドット $\dot{\theta}$ で書く

微分演算 3/3

- 偏微分
  - $\frac{\partial f}{\partial x} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ x以外を定数とみなし，f を微分！

例題

$$f(x, y) = (5 - 4\cos x)y^2 \text{ の } \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

例題　※あとで使う

$$f(\theta, \dot{\theta}) = (5 - 4\cos\theta)\dot{\theta}^2 \text{ の } \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}$$

解答例　3/3

$f(x, y) = (5 - 4\cos x)y^2$ について,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (0 + 4\sin x)y^2 = 4y^2 \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (5 - 4\cos x)2y = (10 - 8\cos x)y$$

$f(\theta, \dot{\theta}) = (5 - 4\cos\theta)\dot{\theta}^2$ についても同様に,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (0 + 4\sin\theta)\dot{\theta}^2 = 4\dot{\theta}^2 \sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = (5 - 4\cos\theta)2\dot{\theta} = (10 - 8\cos\theta)\dot{\theta}$$

「座標変換」と「エネルギー」から,
運動方程式を「算出」！

解析力学入門

ラグランジュ形式の解析力学

- 運動方程式の立て方

  ① 自由度ぎりぎりの変数を選ぶ ←「一般化座標」という

  ② 座標変換を書き下す

  ③ 全運動エネルギー T を①の変数で表す

  ④ 全ポテンシャル U を①の変数で表す

  ⑤ その差 $L = T - U$ を公式に代入する

以上の5段階で，運動方程式が「算出」される！

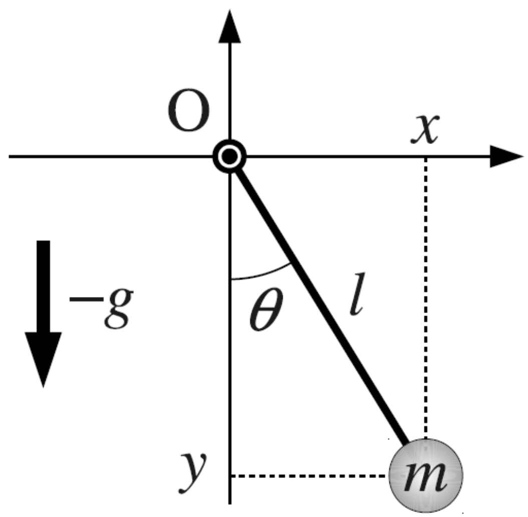
単振り子（解析力学） 1/2

①自由度ぎりぎりの変数

- θ

②座標変換（直交座標 $\leftarrow \theta$）

- $\begin{cases} x = & l\sin\theta \\ y = & -l\cos\theta \end{cases}$



③全運動エネルギー T

- $T \equiv \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2$

例題

T を θ の式で表せ

解答例

- 速度の計算

合成関数の微分

  - $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(l \sin\theta(t)) = l\frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = l\dot{\theta}\cos\theta$
  - $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-l\cos\theta(t)) = \cdots = l\dot{\theta}\sin\theta$

- 全運動エネルギー
  - $T \equiv \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\cdot l^2\dot{\theta}^2((\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2)$

$$= \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2$$

単振り子（解析力学） 2/2

④全ポテンシャル U

- $U \equiv mgy = -mgl\cos\theta$

⑤$L = T - U = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$ を公式へ

公式（ラグランジュの運動方程式）

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

例題　代入して運動方程式を算出せよ

解答例

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

←ラグランジュ関数
or ラグランジアン
という

- 微分の計算
  - $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$
  - $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$
- 公式へ代入

公式: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0}$$

単振り子の運動方程式！

線形化

線形化

単振り子の運動方程式！

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0}$$

- 線形振動系「 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ 」と形が違う.
  - 一次式以外の項 $\sin\theta$ を含む.　←「非線形」項という

  ∴固有値，減衰比，固有振動数などが求まらない
- そこで，線形化！

  $\sin\theta \approx \theta$,　$\cos\theta \approx 1$,　$\theta^2 = \dot{\theta}^2 = 0$

  ①　線形化 $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$

  ②　標準形 $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ ⇒

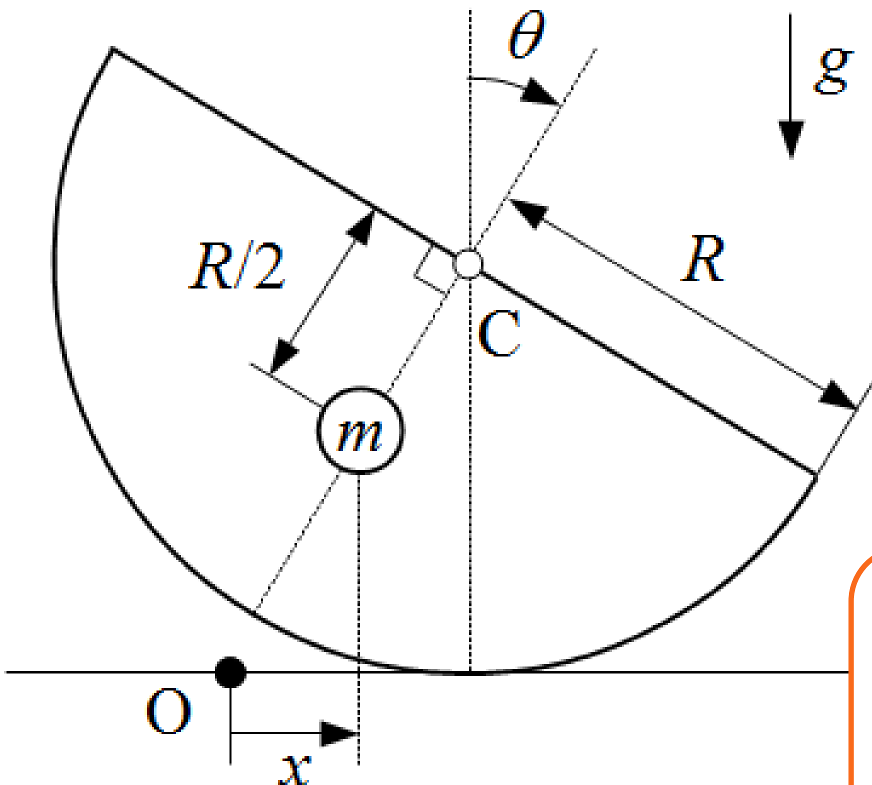
固有値 $= \pm i\sqrt{g/l}$
固有振動数 $= \sqrt{g/l}$
（減衰比＝0）

線形化は一般的にはヤコビ行列で行う

起上り小法師(解析力学)

- 運動方程式を求めよ.

《仮定》滑らずに転がる. その他の摩擦等は無視する.



①変数の選択➔ θ

②座標変換

$$\begin{cases} x = R\theta - \dfrac{R}{2}\sin\theta \\ y = R - \dfrac{R}{2}\cos\theta \end{cases}$$

研究課題

手順③～⑤により, 運動方程式を求め, 線形化せよ.

略解

- ラグランジュ関数 $L = T - U$
  - 速度 $(\dot{x}, \dot{y}) = R\dot{\theta}\left(1 - \frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2}\right)$
  - 運動エネルギー $T = \frac{mR^2}{8}(5 - 4\cos\theta)\dot{\theta}^2$
  - ポテンシャル $U = \frac{mgR}{2}(2 - \cos\theta)$
- 運動方程式

$$\frac{mR^2}{4}(5 - 4\cos\theta)\ddot{\theta} + \frac{mgR}{2}\sin\theta + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

- 線形化 $\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{mgR}{2}\theta = 0$

倒立振り子

倒立振り子（自立ロボット）

振り子の運動

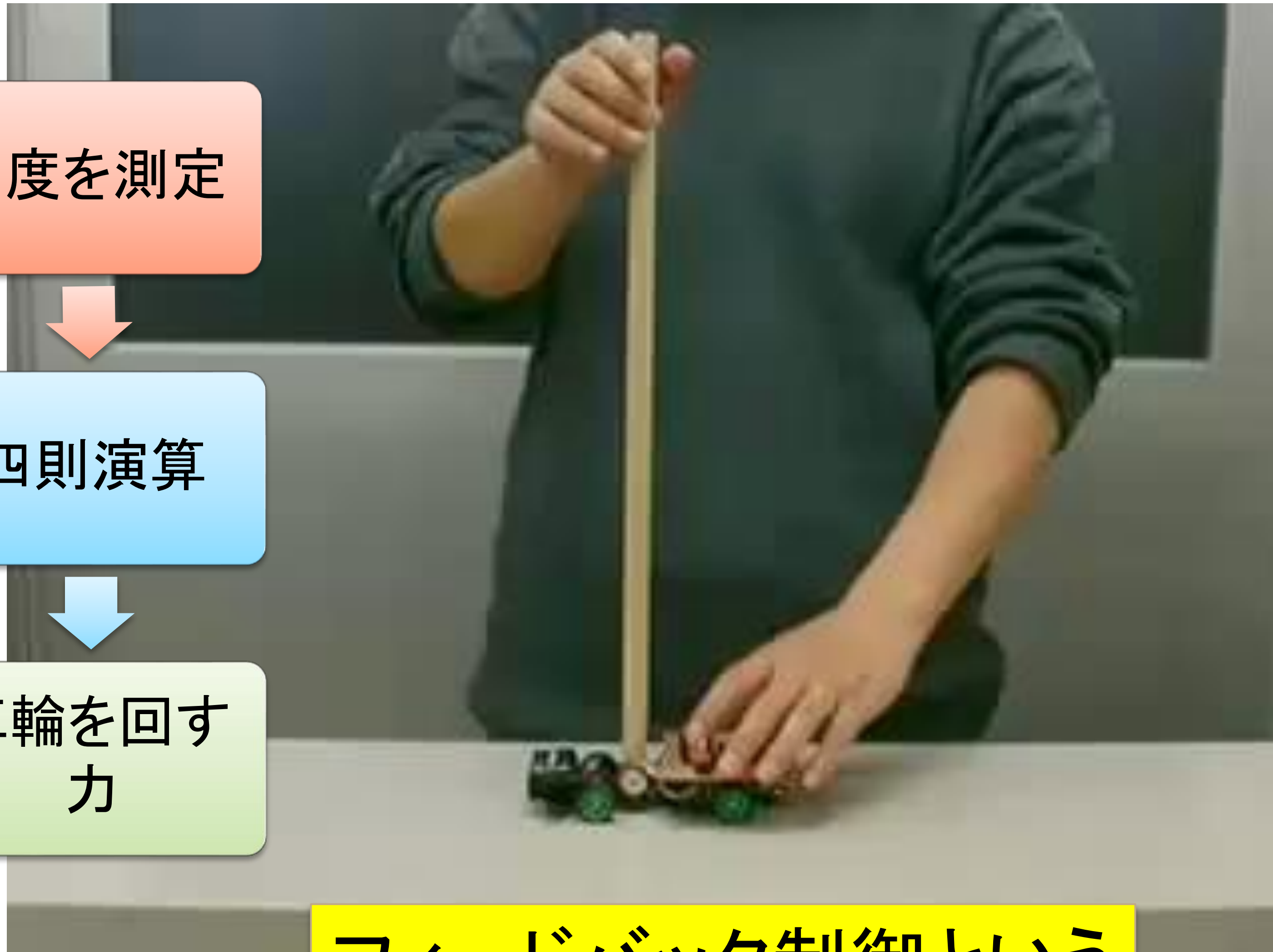
角度を測定

↓

四則演算

↓

車輪を回す力



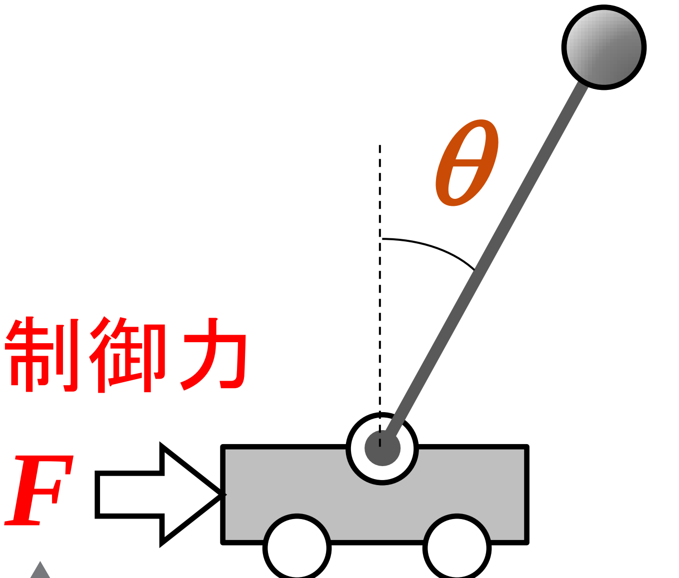
フィードバック制御という

どんな計算式か？

θ 角度

ω 角速度

測定



計算式（四則演算）

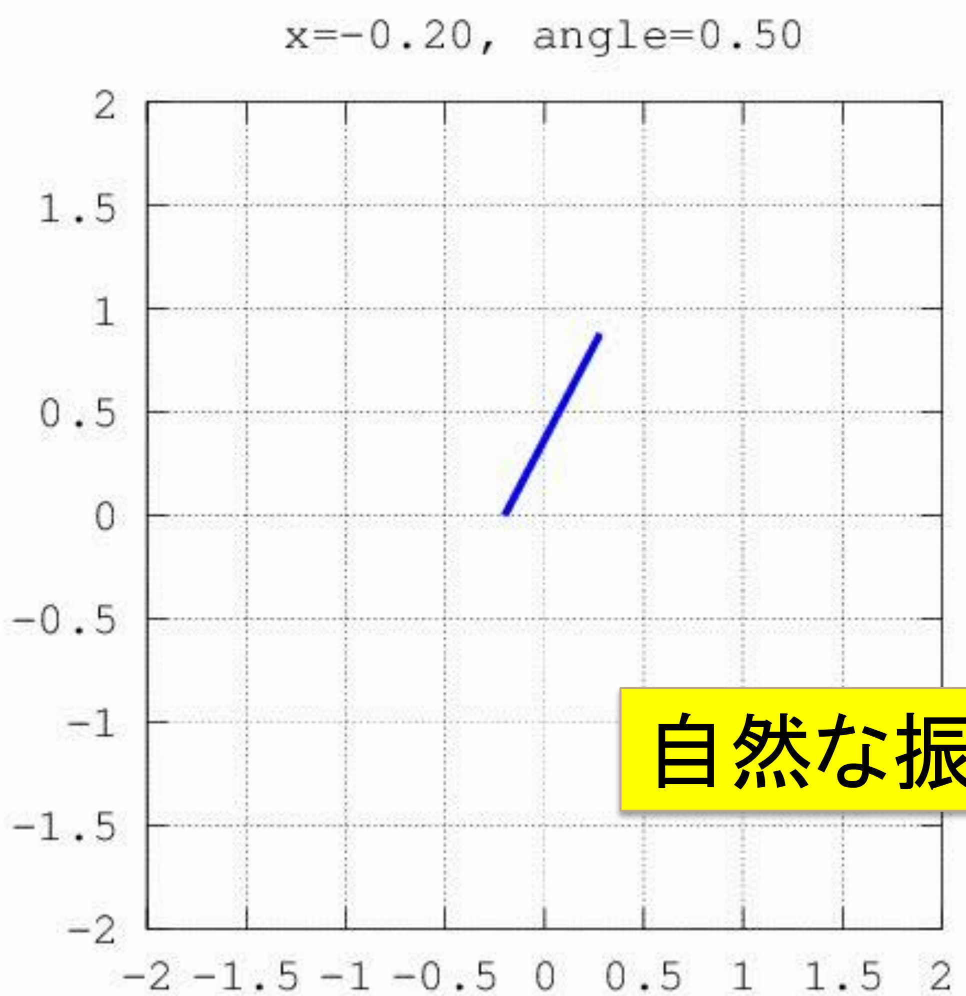
$$F = a \times \theta + b \times \omega$$

計算された力で押す

「フィードバック」という

制御がないと？

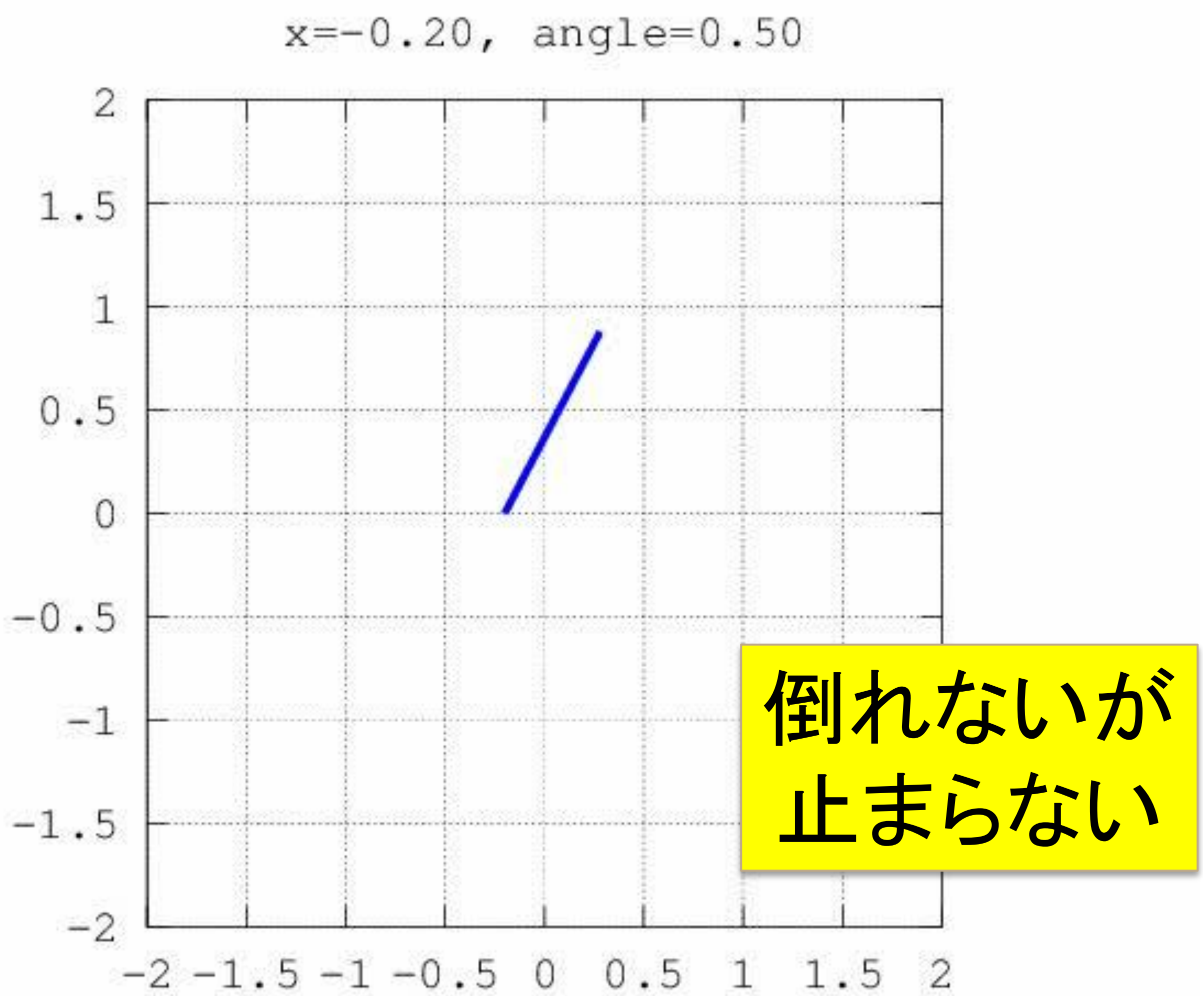
制御力 $\boldsymbol{F} = 0$



自然な振り子運動

角度だけで式を作ると？

$F = a \times \theta + b \cancel{\times} \omega$ 角速度なし

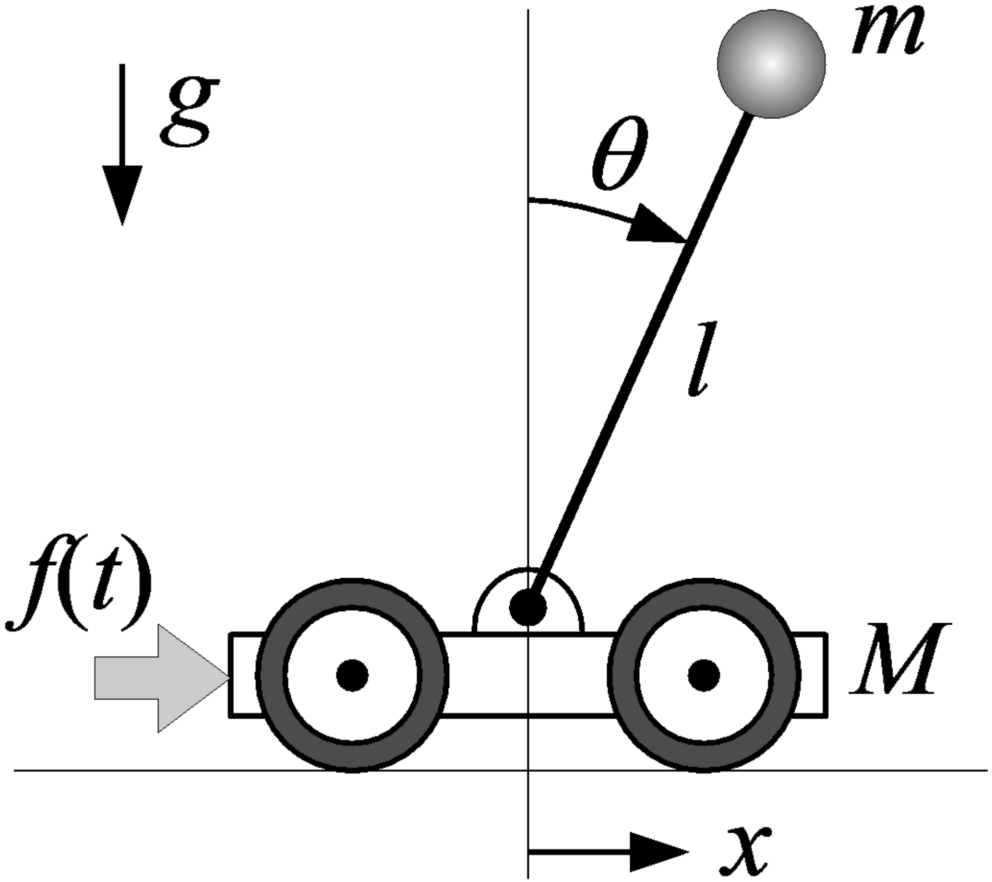


角度＆角速度で式を作ると？

$$F = a \times \theta + b \times \omega$$

立った状態で止まる！
自立ロボットの原理

力学モデル



- この機構の自由度は2 ➔(x,θ)で姿勢が決まる

倒立振り子（解析力学） 1/2

①一般化座標　※自由度ぎりぎりの変数

- (x, θ)

②座標変換

- 台車 $\begin{cases} x_M = x \\ y_M = G \end{cases}$　※G は台車重心の高さ
- 振子 $\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = S + l\cos\theta \end{cases}$　※S は支点の高さ

③全運動エネルギー

- $T \equiv \frac{M}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)$

例題

T を x, θ の式で表せ

解答例

- 速度の計算　※G, Sは定数
  - $\dot{x}_M = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
  - $\dot{y}_M = \frac{d}{dt}(G) = 0$
  - $\dot{x}_m = \frac{d}{dt}(x(t) + l\sin\theta(t)) = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$
  - $\dot{y}_m = \frac{d}{dt}(S + l\cos\theta(t)) = -l\dot{\theta}\sin\theta$

∴③全運動エネルギー

- $T \equiv \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

倒立振り子（解析力学） 2/2

④全ポテンシャル U

- $U \equiv Mgy_M + mgy_m = MgG + mg(S + l\cos\theta)$

⑤$L = T - U$ を公式へ代入

公式（ラグランジュの運動方程式）

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

例題

代入して
運動方程式
を算出せよ

解答例　1/2

- $L = T - U =$
  $$\frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - MgG - mg(S + l\cos\theta)$$
- 微分の計算
  - $\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta,$
    $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$
  - $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\underline{ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} + mgl\sin\theta,$
    $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta,$$
    $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - \underline{ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}$$

解答例　2/2

公式：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = f(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

⑤ L を公式へ代入

倒立振り子の運動方程式！

$$\boxed{\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + (ml\cos\theta)\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = f(t) \\ (ml\cos\theta)\ddot{x} + (ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \end{cases}}$$

- フィードバック制御
  - $f(t) = K_1 x + K_2 \dot{x} + K_3 \theta + K_4 \dot{\theta}$
  - 係数 K_1, K_2, K_3, K_4 をゲインという！

➔調整すると振り子が立つ

実習（InvPend.xls）

倒立振り子の力学
シミュレーションの
Excel シート