Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第1講
ガイダンス

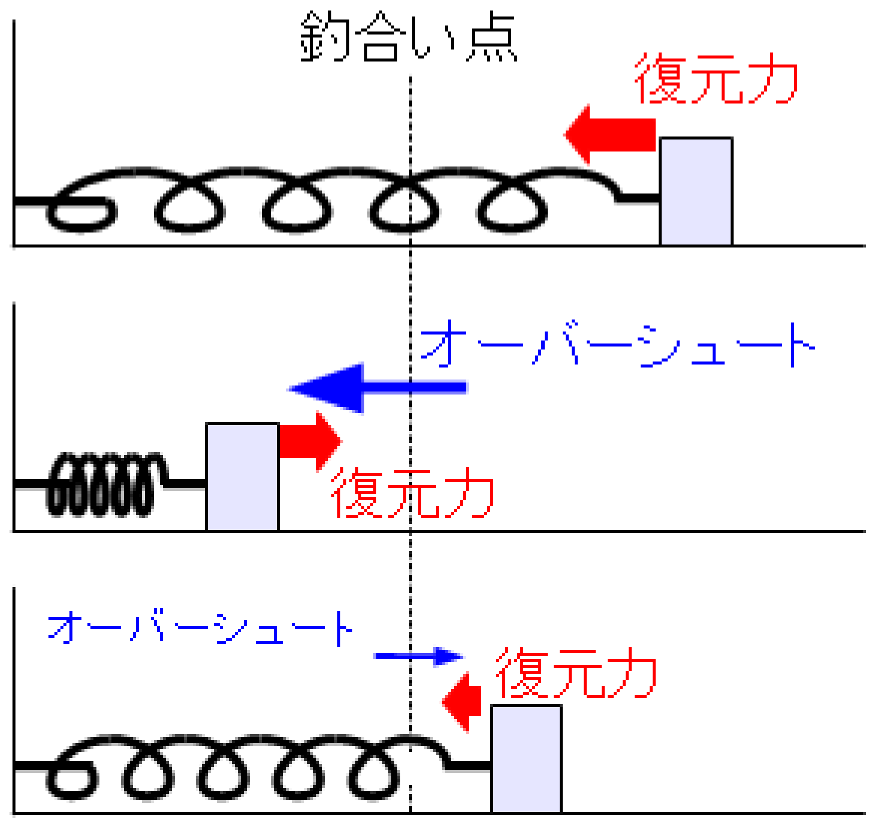
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

振動とは？

- 同じ場所を行ったり来たりする運動のこと
- 主要因は**復元力**！
- オーバーシュート

＝行き過ぎ



代表的な振動(一部)

- 強制振動

振動的な外力 → 振動系 → 振動的な運動

- 自由振動

外力なし　振動系 → 振動的な運動

- 自励振動(非線形振動の1つ)

非振動的な外力 → 振動系 → 振動的な運動

振動現象の実例1 （自由振動）

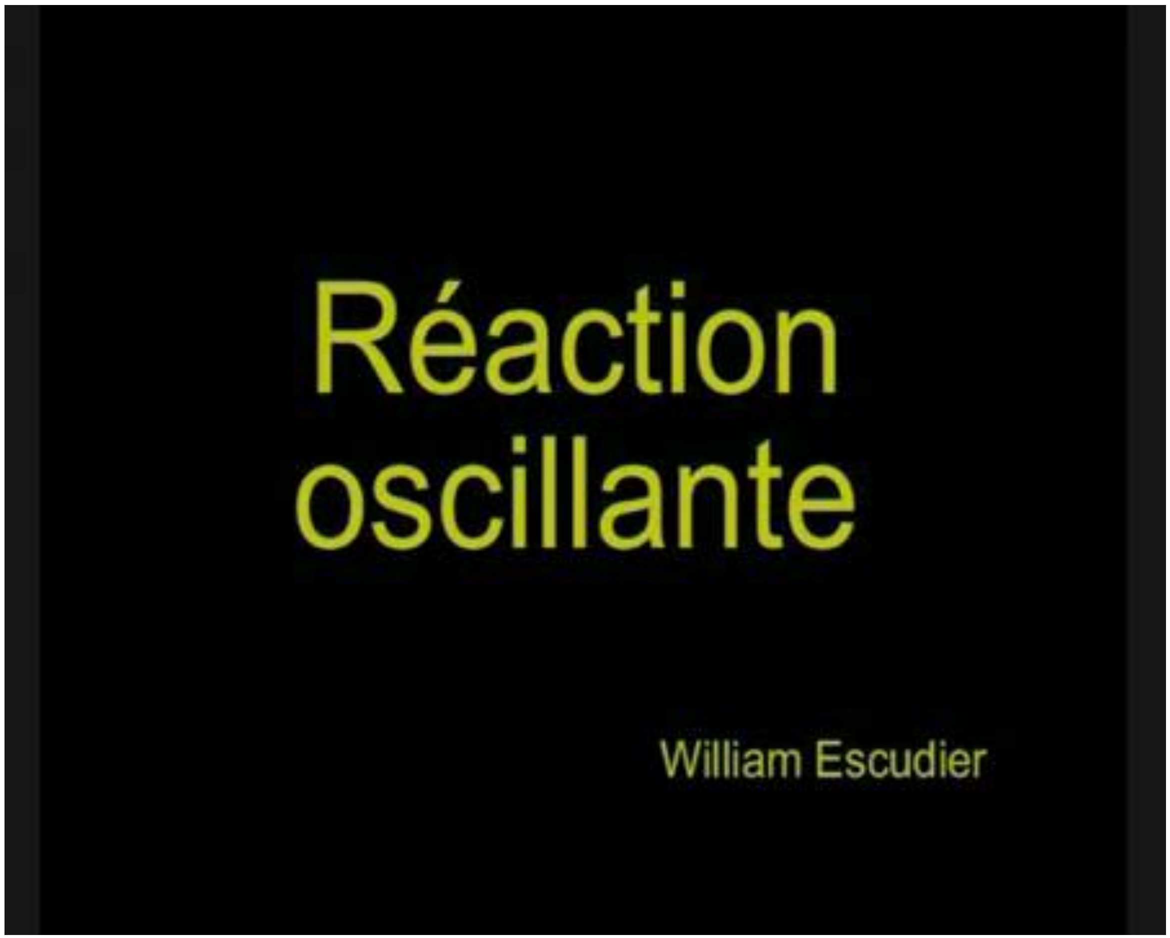
倒立振り子ロボット

振動現象の実例2（自励振動）

タコマナローズ橋の崩壊

振動現象の実例3 （自励振動）

BZ（ベロウソフ・ジャボチンスキー）反応



振動現象の実例4

≒自然現象

中国政府による制御
（為替介入）

人工(制御あり)

「復元力」の教訓

- 「機械モノ」は必ず振動する！

  ∵形状を保つための復元力を有する
  （さもないとバラける）

- 「フィードバック制御系」は振動する！

  ∵目標状態を保つ制御力＝復元力
  （さもないと目標からズレる）

➔振動工学と制御工学は数学が共通

スケジュール

	テーマ	内容	資料
1講(30分)	ガイダンス	振動とは？	vib7h_A.ppt
2講(60分)	自由振動	自由振動(6種)，固有値	
3講(30分)		減衰比，固有振動数	
4講(60分)	運動方程式の立て方	解析力学，線形化	vib7h_B.ppt
5講(60分)	強制振動	強制振動，共振	vib7h_C.ppt
6講(60分)		周波数応答，基本振動数3つ	
7講(30分)	非線形振動ほか	連成振動，初期値依存性	vib7h_D.ppt
ディスカッション			

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第2講
自由振動と固有値

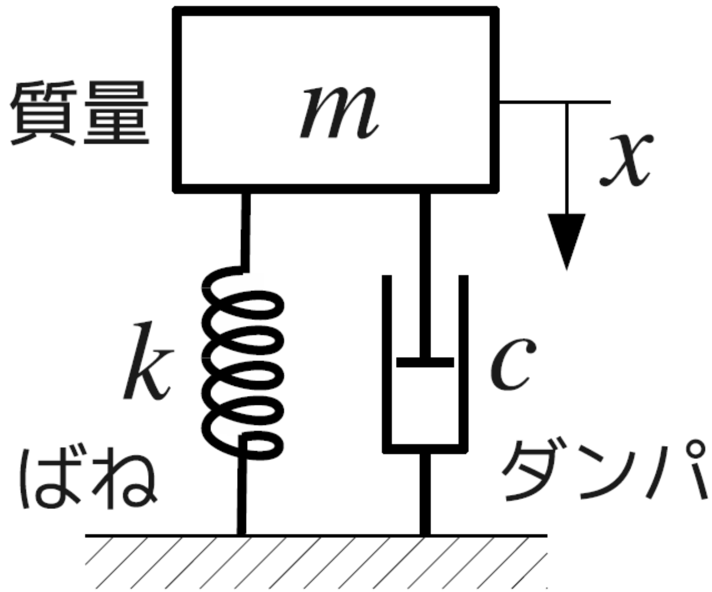
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

- 自由振動のモデル
  - 力学モデル（質量，ばね，ダンパー）
  - 数理モデル（運動方程式）
- 自由振動のパターン
  - 振動するか否か
  - 減衰か，一定か，発散か
- 振動の固有値
  - 振動パターンの固有値による予測・分類

自由振動モデル（1自由度線形自由振動系）



状態量

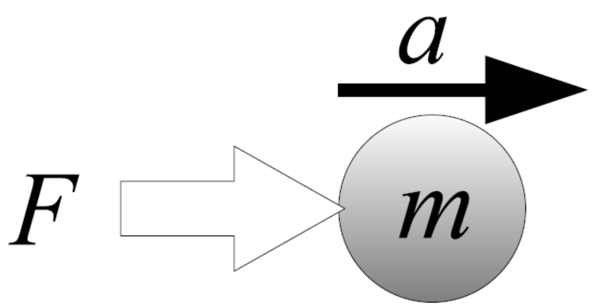
x	変位 [m]

m	質量 [kg]
k	ばね定数 [N/m]
c	減衰係数 [Ns/m]

パラメータ

- 振動が起こる，最も単純なカラクリ
- *m*,*c*,*k* の設定で，身の周りの多くの振動パターンを再現できる

《復習》高校の運動方程式

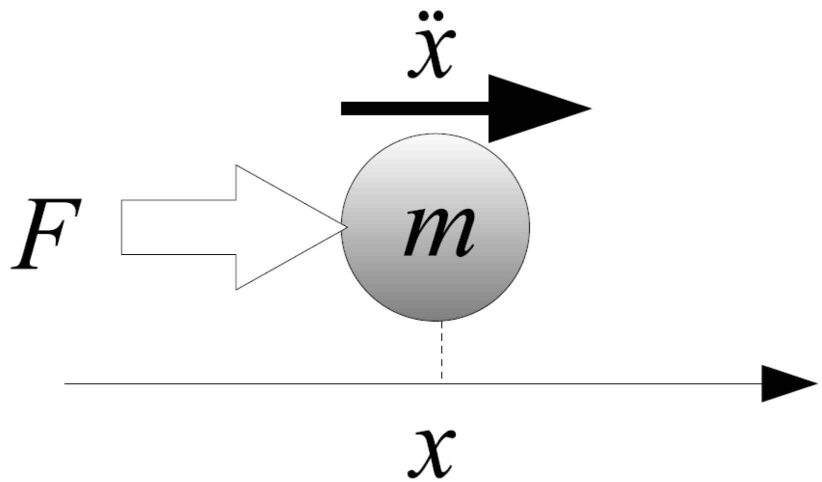


$$ma = F$$

- 質量m × 加速度a ＝ 力 F
- $ma = F$ を解いても，加速度 a しか分からず，運動は不明．

運動≡変位の時間変化

《復習》大学の運動方程式



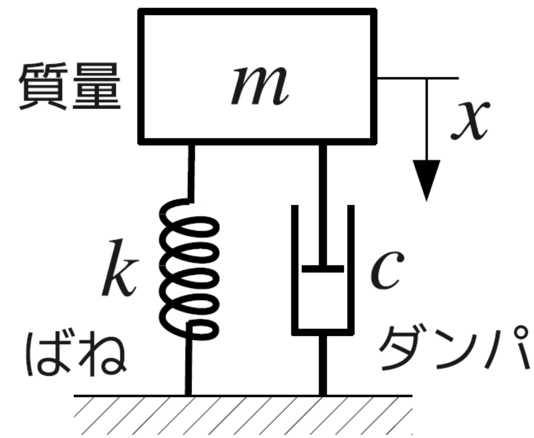
$$m\ddot{x} = F$$

- 変位を表す変数 x を導入
- 微分演算を導入
  - 速度 $\dot{x}$ ･･･変位 x の1回微分
  - 加速度 $\ddot{x}$･･･変位 x の2回微分
- $m\ddot{x} = F$ を解けば，運動 $x(t)$ が分かる.

運動
　＝変位の時間変化

自由振動の運動方程式（重力無視）

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



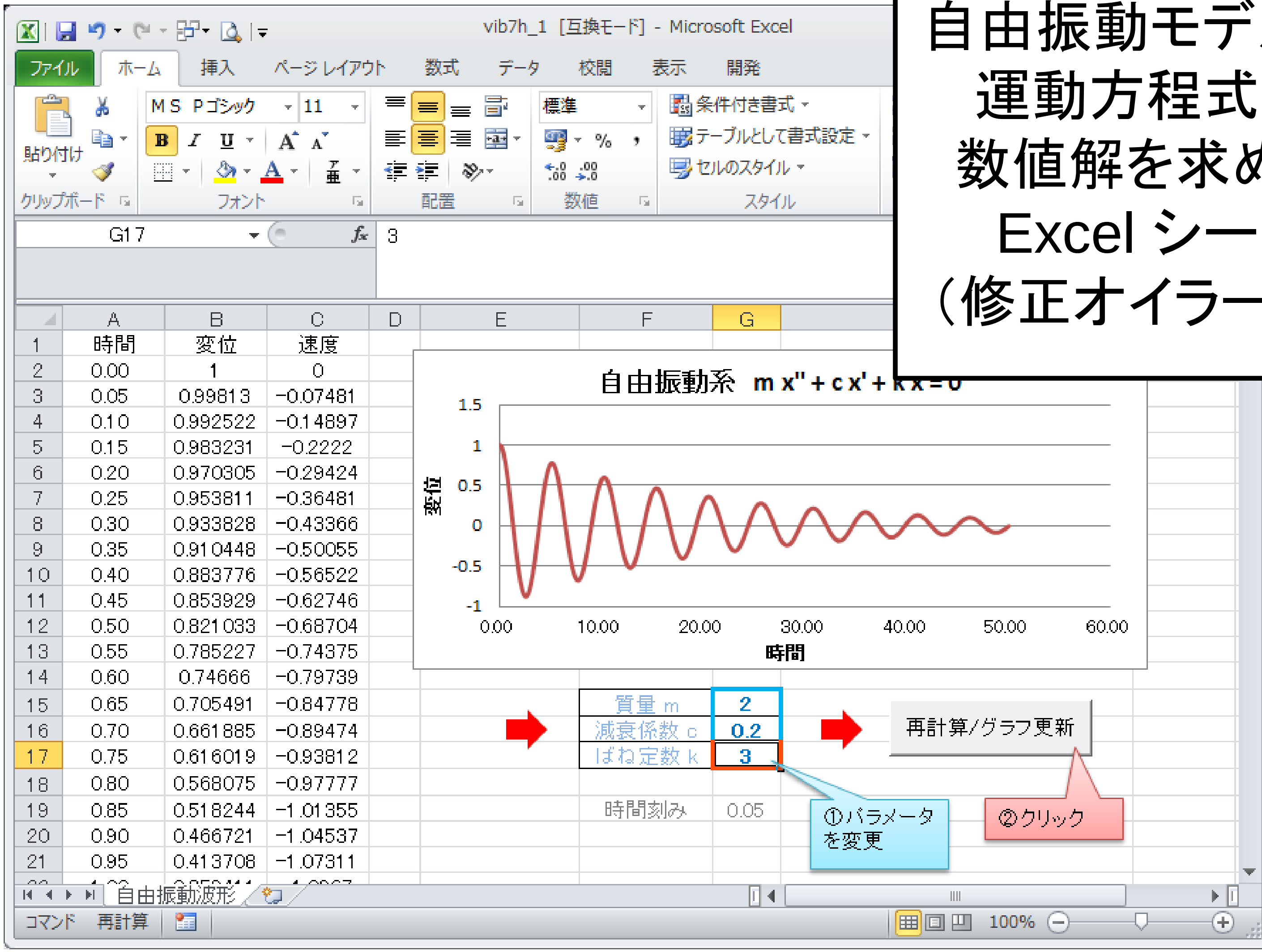
- 導出方法

$$m\ddot{x} = F = -kx - c\dot{x}$$

  - $-kx$ ... ばねの復元力　∝変位（フックの法則）
  - $-c\dot{x}$ ... 減衰力（ブレーキ力）　∝速度

- 機械構造➔（m,c,k）（測定 or 算定）

実習（vib7h_A1.xls）

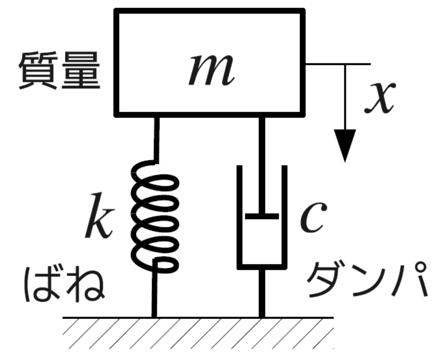


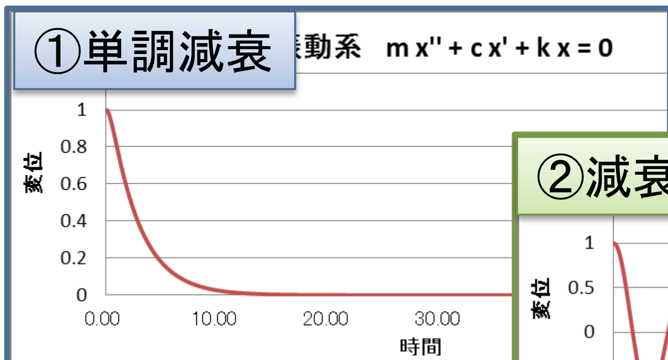
時間	変位	速度
0.00	1	0
0.05	0.99813	−0.07481
0.10	0.992522	−0.14897
0.15	0.983231	−0.2222
0.20	0.970305	−0.29424
0.25	0.953811	−0.36481
0.30	0.933828	−0.43366
0.35	0.910448	−0.50055
0.40	0.883776	−0.56522
0.45	0.853929	−0.62746
0.50	0.821033	−0.68704
0.55	0.785227	−0.74375
0.60	0.74666	−0.79739
0.65	0.705491	−0.84778
0.70	0.661885	−0.89474
0.75	0.616019	−0.93812
0.80	0.568075	−0.97777
0.85	0.518244	−1.01355
0.90	0.466721	−1.04537
0.95	0.413708	−1.07311

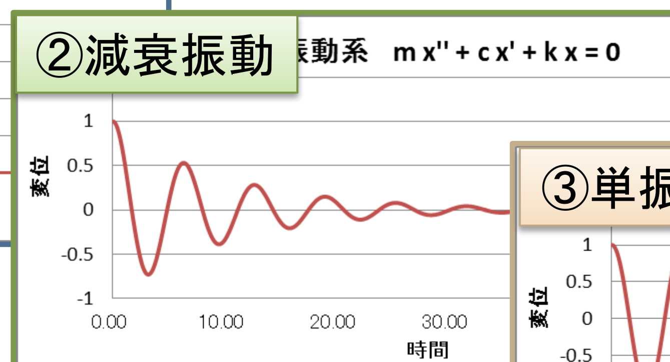
自由振動モデルの運動方程式の数値解を求めるExcel シート（修正オイラー法）

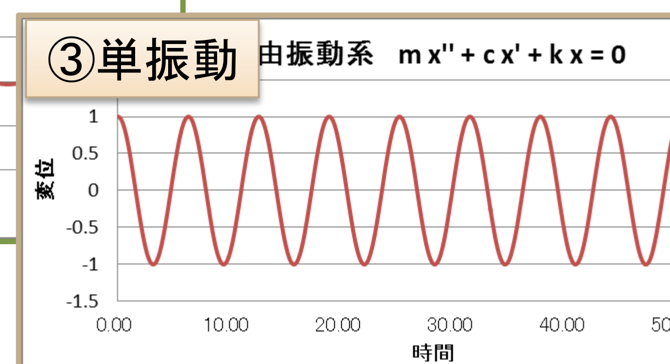
課題 (*m*,*c*,*k*)とダイナミクス(動き方)

- (*m*,*c*,*k*)の値を調整し,「再計算」をクリック.
- 次の3種類のダイナミクスを求め,
  対応する(*m*,*c*,*k*)の値を記録せよ.





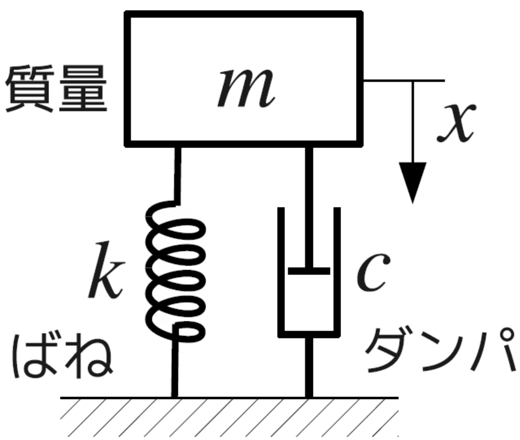


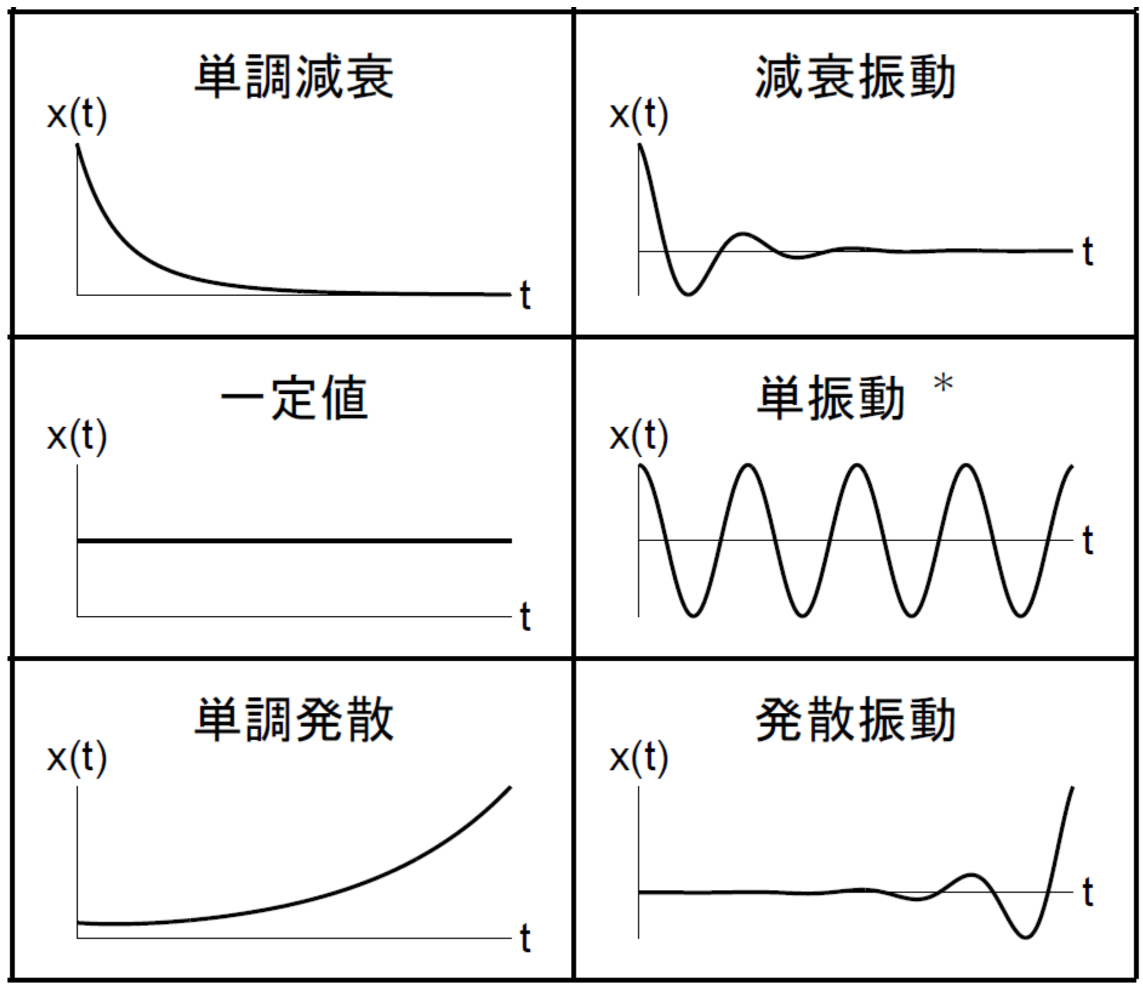


自由振動系のダイナミクス(全パターン)

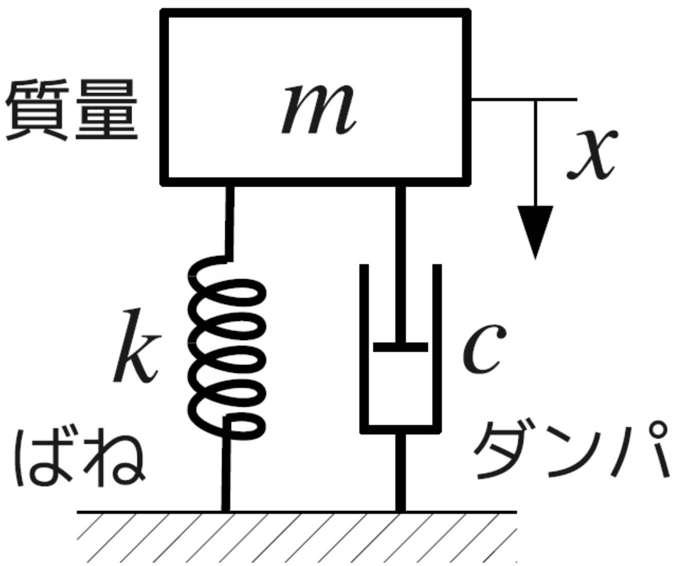
起りうるダイナミクスは全部で6パターン

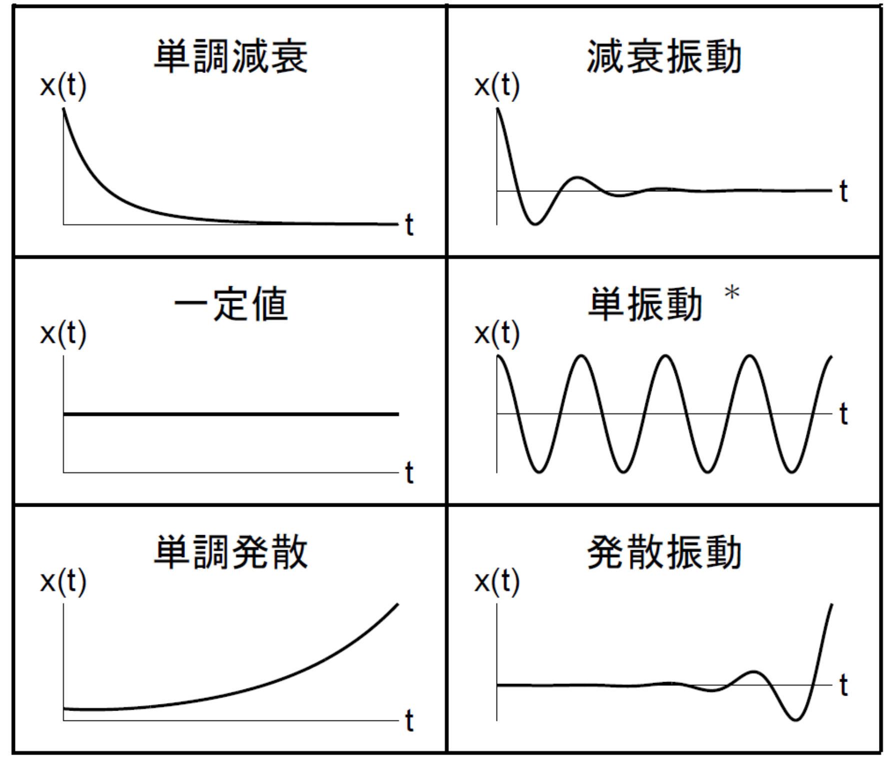
自由振動系





構造と振動？





- m = 5.5, c = 3.2, k = 0.8 のときの振動パターンは，6種類のどれか？　5秒で選べ！

構造（m,c,k）を見ても，動きは連想困難！

➔固有値

自由振動の固有値

構造パラメータ

m 質量 [kg]

k ばね定数 [N/m]

c 減衰係数 [Ns/m]

固有方程式 →

動特性パラメータ「固有値」

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

- 固有値 $s = a \pm bi$ ※一般に複素数
- 直接，動き方を表す．
  - 固有値の実部 a … 減衰の強さ
  - 固有値の虚部 b … 実際の振動数

$i \equiv \sqrt{-1}$

固有値とは？

- 自由振動の運動方程式（2階常微分方程式）

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

↓ 常微分方程式論

- 解の一般形

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

c_1, c_2 は初期条件で決まる定数

- 指数 s_1, s_2 を「固有値」という.
  - 一般に複素数

固有値の求め方

- 自由振動の運動方程式(2階常微分方程式)

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

同じ係数の2次方程式

- 固有方程式

$$ms^2 + cs + k = 0$$

解の公式

- 固有値(一般に複素数)

$$s_1 = \frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}, \quad s_2 = \frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

実習（vib7h_A2.xls）

- 各シートの振動波形を観察し，当てはまる性質をチェック☑せよ．

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）

解答例

$$s = a \pm bi$$

実　虚

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ （☑減衰 ☐一定 ☐発散）（☐振動 ☑非振動）
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ （☐減衰 ☐一定 ☑発散）（☐振動 ☑非振動）
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ （☐減衰 ☐一定 ☑発散）（☐振動 ☑非振動）
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ （☐減衰 ☑一定 ☐発散）（☑振動 ☐非振動）
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ （☑減衰 ☐一定 ☐発散）（☑振動 ☐非振動）
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ （☐減衰 ☐一定 ☑発散）（☑振動 ☐非振動）

- 固有値の実部・・・（全て−）減衰，（1つでも＋）発散
- 固有値の虚部・・・（≠0）振動，（0）非振動

なぜ「$s = -1 \pm 3i$」が減衰振動か？

- 計算による証明
  - 解の一般形

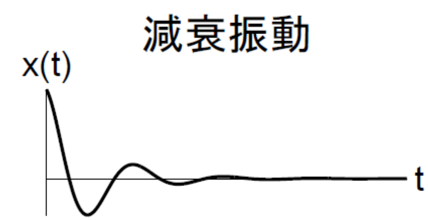
$$x(t) \approx e^{s_1 t} + e^{s_2 t} \ (\text{簡単のため} c_1 = c_2 = 1)$$

  - オイラーの公式

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow e^{(-\theta)i} = \cos\theta - i\sin\theta$$

  - 複素固有値の代入

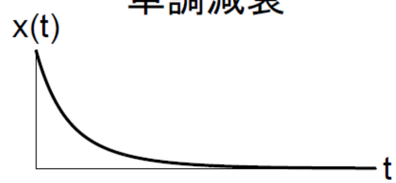
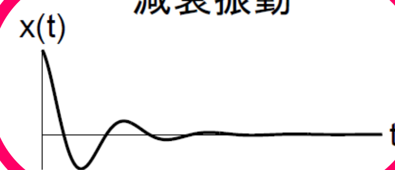
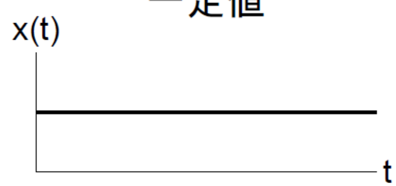
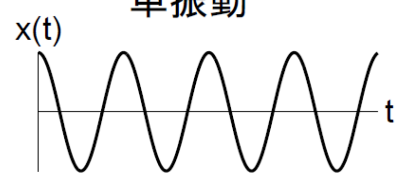
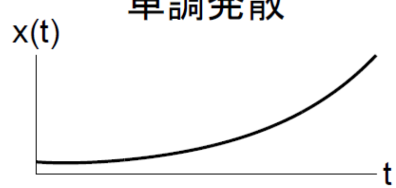
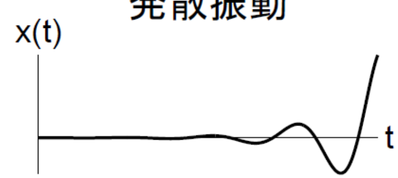
$$x(t) = e^{(-1-3i)t} + e^{(-1+3i)t}$$
$$= e^{-t}e^{(-3i)t} + e^{-t}e^{(+3i)t}$$
$$= e^{-t}\left\{e^{(-3t)i} + e^{(+3t)i}\right\} = e^{-t}\{2\cos 3t\}$$

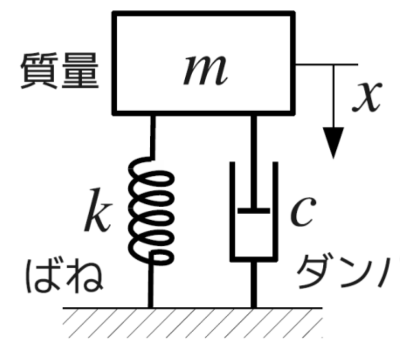


➔固有値の使い方（参考資料14頁，表4.1）

- 固有値 $s=-0.29\pm0.25i$ のときの振動パターンは，6種類のどれか？　5秒で選べ！

即答可能！

固有値 $a \pm ib$		虚部 b の有無	
		$b=0$ (非振動)	$b\neq 0$ (振動)
実部 a の符号	$a<0$ (減衰・安定)	単調減衰 	減衰振動 
	$a=0$ (一定・中立)	一定値 	単振動 * 
	$a>0$ (発散・不安定)	単調発散 	発散振動 



「自由振動と固有値」のまとめ

- 運動方程式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

  ➔ $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$

- 固有方程式 $ms^2 + cs + k = 0$

  ➔ 固有値 $s_i = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$

- 固有値「$s = a \pm bi$」の使い方

実部 a　虚部 b

指数減衰率 ← $x(t) \approx e^{at} \cos bt$ → 振動数

実習(vib7h_A3.xls)

- 固有値を求め，ダイナミクスを予測，検証せよ．
  1. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ ※2個の実数
  2. $\ddot{x} + 9x = 0$ ※純虚数
  3. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$ ※複素数
- 手順
  ① (m,c,k)を変更して，固有値を求める．
  ② 前頁の表と照合して「予測」
  ③ シミュレータ「vib7h_A1.xls」を動かし「検証」

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第3講

減衰比と固有振動数

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※教材のダウンロード

➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

- 自由振動モデルの標準形
  - $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ のパラメータを2個に集約
  - 固有値を見やすく工夫する.

➔減衰比 ζ,　固有振動数 ω_n

- 減衰比
  - 振動パターンの整列
- 固有振動数
  - 自由振動の振動数 ≠ 固有振動数
  - 相似倍率 ω_n

標準形 1/2

- 自由振動の運動方程式（2階常微分方程式）

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0}$$

- m で割る（$C \equiv c/m$, $K \equiv k/m$）

$$\boxed{\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0}$$

- 固有値 $s = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4K}}{2}$
  - $\sqrt{2個のパラメータ}$ を $\sqrt{1個のパラメータ}$ にしたい

標準形　2/2

- 変数変換の導入　$C = 2\zeta\omega_n$，$K = {\omega_n}^2$

標準形 $$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0}$$

- 固有値は，$s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$

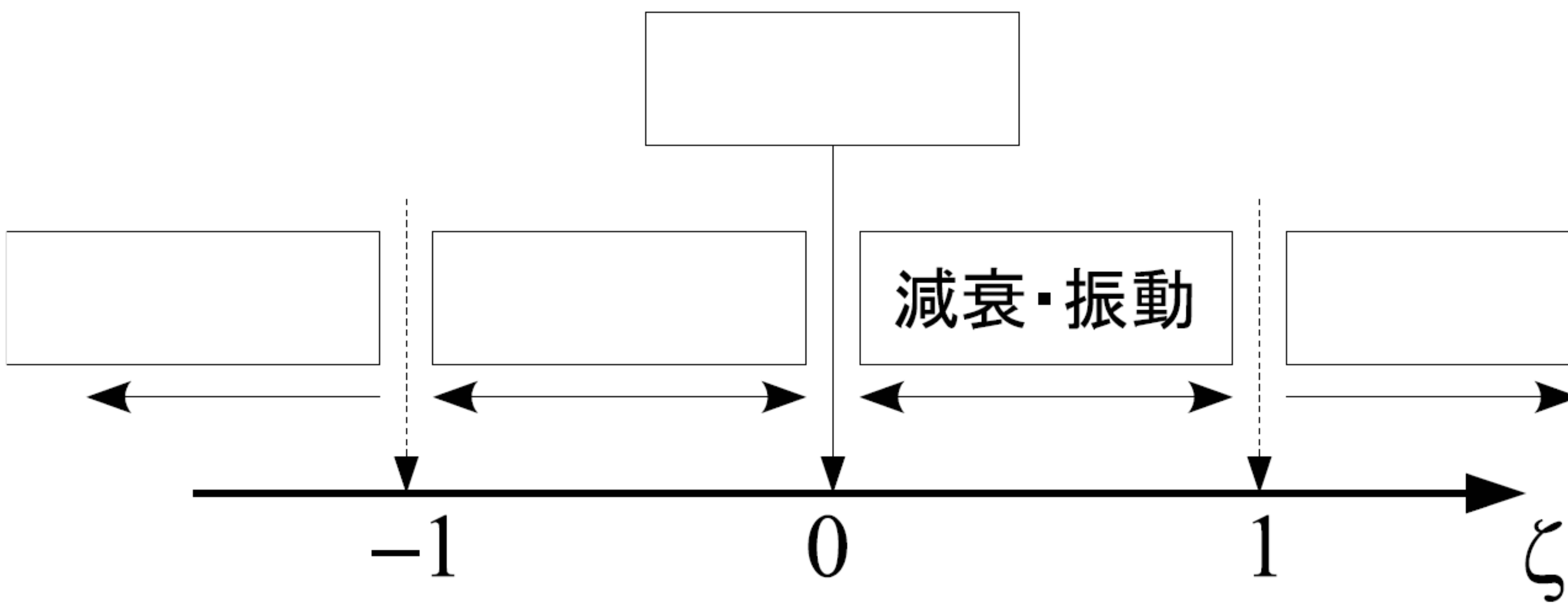
固有値のパターンが，ζ にしか依存しなくなった！

- $\omega_n \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ を「固有振動数」という.
- $\zeta \equiv \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$ を「減衰比」という.

《減衰比 ζ 》ダイナミクスの整列

- 課題：空欄を埋めよ！

《ヒント》固有値 $s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$



《減衰比 ζ 》ダイナミクスの分類名

減衰比の値	分類名	オーバーシュート
$\zeta = 0$	無減衰 (undamped)	有
$0 < \zeta < 1$	不足減衰 (under-damping)	有
$\zeta = 1$	臨界減衰 (critical-damping)	無し　※ぎりぎり
$1 < \zeta$	過減衰 (over-damping)	無し

振動波形との対応関係

- 減衰比が等しい ⇔ 振動波形が相似
  - 減衰比が等しい振動は，振動波形を縦横に伸縮させると互いに重なる（縦横比は一般に ≠1）

- 固有振動数 ＝ 時間軸方向の相似倍率
  - 固有値 $s=\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\equiv A_{\pm}\omega_n$
  - 振動波形 $x(t)\approx e^{(A_-\omega_n)t}+e^{(A_+\omega_n)t}$
    $$=e^{A_-(\omega_n t)}+e^{A_+(\omega_n t)}$$

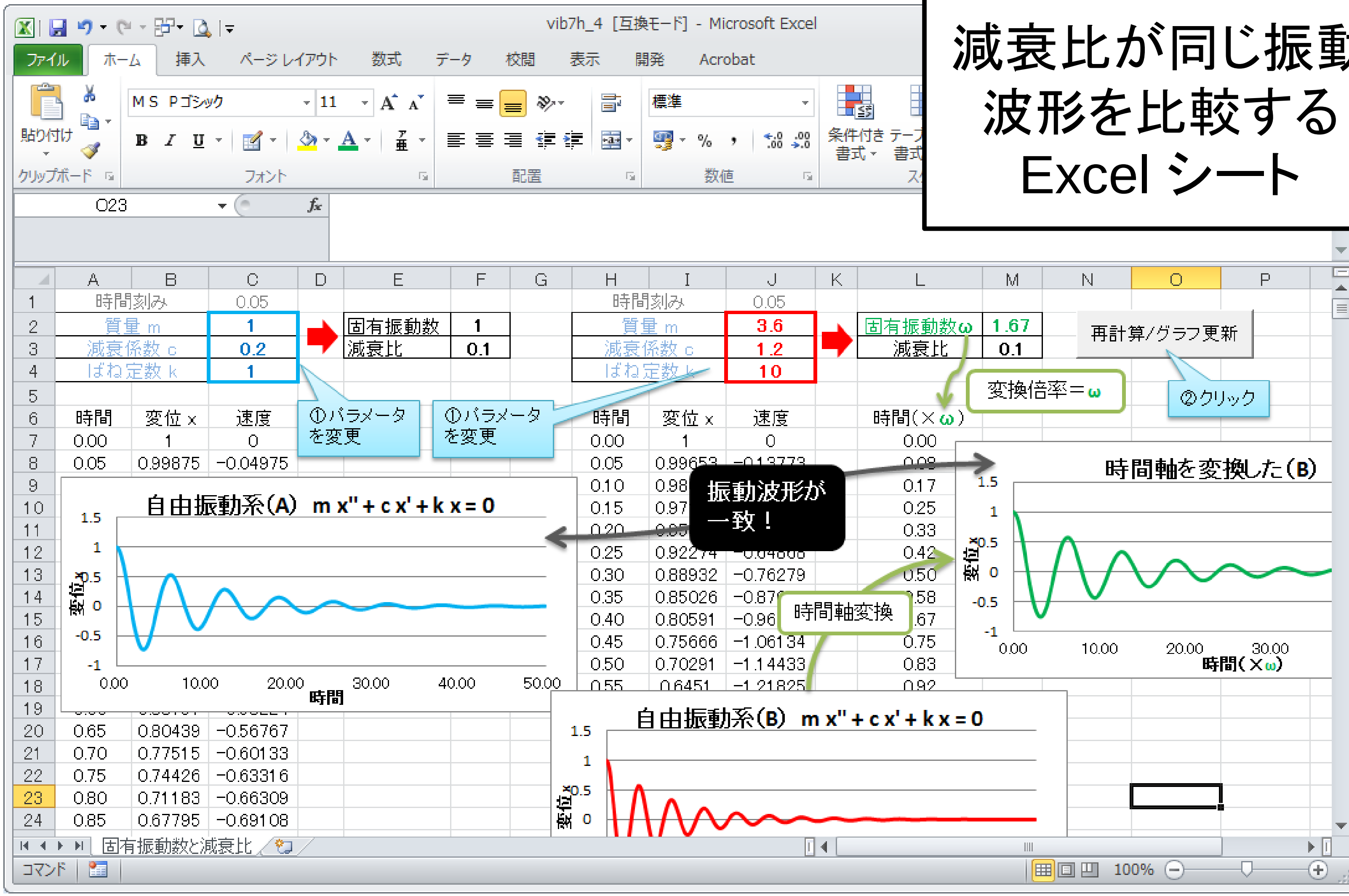
時間軸の伸縮

$T\equiv\omega_n t$

➔ $x(T)\approx e^{A_-T}+e^{A_+T}$ に相似な波形となる.

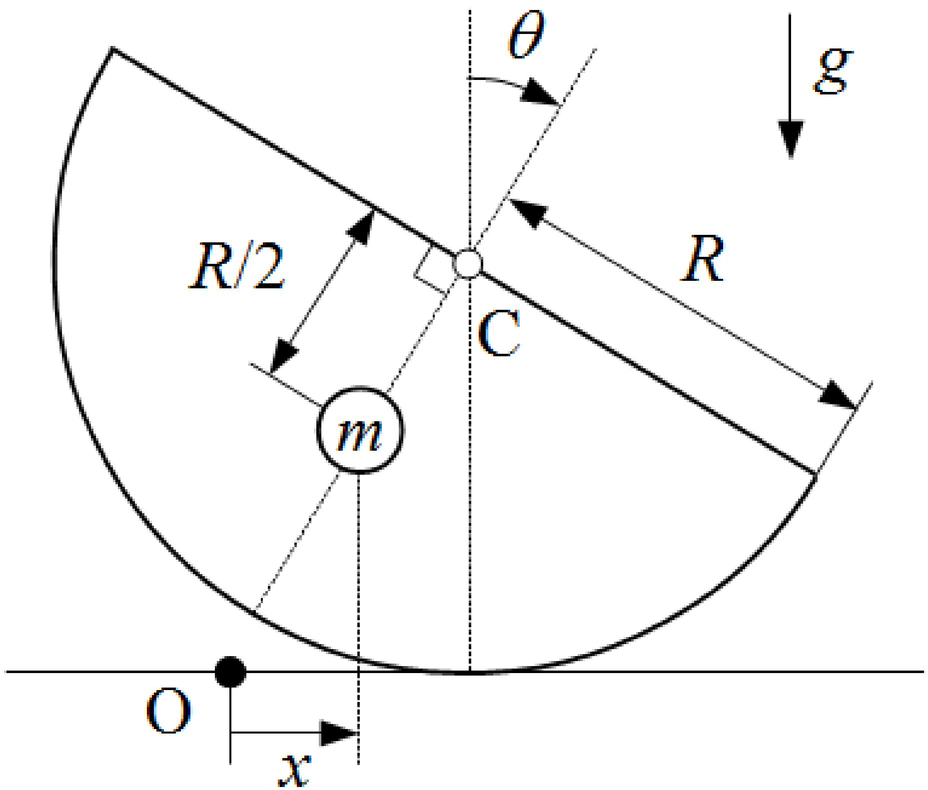
実習（vib7h_A4.xls）

減衰比が同じ振動
波形を比較する
Excel シート



例題

- 次の「起上り小法師」の固有振動数を求めよ.



《仮定》滑らずに転がる. その他の摩擦等は無視する.

ヒント： θが小さいとき運動方程式は,

$$\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta}+\frac{mgR}{2}\theta=0$$

解答例

- 運動方程式 $\frac{mR^2}{4}\ddot{\theta}+\frac{mgR}{2}\theta=0$
- 標準形「$\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+{\omega_n}^2\theta=0$」に変形
  - 加速度 $\ddot{\theta}$ の係数で割る．

$$\ddot{\theta}+0\dot{\theta}+\frac{2g}{R}\theta=0$$

  - 標準形と比較

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2g}{R}}$$ （固有振動数）

$$\zeta=0$$ （減衰比）

《実際のハードル》

運動方程式の入手方法！

自分で立てんのは，ふつう無理でしょ．論外でしょ？

➔次回，乞うご期待

減衰振動の振動数 ≠ 固有振動数

- 自由振動は(ほとんど)固有振動数で揺れない！
  - □固有値 $s = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$
  - □減衰振動(不足減衰)　$0 < \zeta < 1$

➔ $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{\text{マイナス}} = i\sqrt{1 - \zeta^2}$

➔固有値 $\mathrm{s} = \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\text{実部 } a} \pm i\left(\underbrace{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}_{\text{虚部 } b}\right)$

指数減衰率 ← 実部 a　　虚部 b → 振動数

$$x(t) \approx e^{at}\cos bt$$

《例》$\zeta = 0.5$ ➔ 減衰振動数 $= \omega_n\sqrt{0.75} \approx 0.87\omega_n$

「減衰比と固有振動数」のまとめ

- 減衰比が同じ振動 ➔ 振動波形が相似
  - 時間軸の相似倍率＝固有振動数
- 減衰振動は固有振動数では揺れない
  - 固有振動数＝減衰0（単振動）のときの振動数
  - 減衰（比）増大 ➔ 振動数＝ $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 減少

☆ 現実の振動系（減衰あり）は，
固有振動数より遅く揺れる！