専門科目「ロボット力学」

第8講 オイラー・ラグランジュ方程式

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻 吉田 勝俊

※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

- オイラー・ラグランジュ方程式
- 一般化座標
- 慣性座標と一般化座標
- 車輪型倒立ロボット
  - オイラー・ラグランジュ方程式の応用
  - 運動方程式の１階化
- コンピュータ演習

オイラー・ラグランジュ方程式

☆「**機械力学**」**11 章**の復習．運動方程式を算出する公式！

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{8.1}$$

- q_i ··· 一般化座標
- $\mathcal{L}$ ··· ラグランジュ関数
  := (運動エネルギー) − (ポテンシャルエネルギー)
- $\mathcal{D}$ ··· 散逸関数
- $\mathcal{F}_i$ ··· q_i に作用する一般化力

表1, p18：オイラー・ラグランジュ方程式の諸量

ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$	$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$	($\mathcal{T}$：運動エネ, $\mathcal{U}$：ポテンシャル)	
運動エネルギー $\mathcal{T}$	並進	$\frac{1}{2}m\|\dot{\boldsymbol{x}}\|^2$	$\boldsymbol{x}, \theta, \boldsymbol{\omega}, I, J$ は慣性系で測った成分
	回転 (2 次元)	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	
	回転 (3 次元)	$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(J\boldsymbol{\omega})$	
ポテンシャル $\mathcal{U}$	重力	$m\,g\,h$	
	線形ばね	$\frac{1}{2}k\,x^2$	
散逸関数 $\mathcal{D}$	クーロン摩擦	$\frac{1}{2}\nu R\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\dot{x}$	
	粘性抵抗	$\frac{1}{2}c\,\dot{x}^2$	
	慣性抵抗	$\frac{1}{2}D\,\|\dot{x}\|\dot{x}^2$	
一般化力 $\mathcal{F} = [\mathcal{F}_i]$		$\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} f_k$	**次回で詳しく**

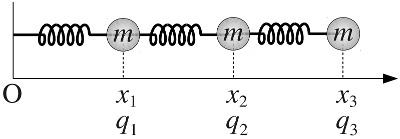
一般化座標 $\boldsymbol{q} = [q_i]$

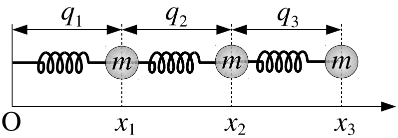
- 機構の配位を表す変数を，単位を気にせず並べたもの

例（2 次元剛体の配位）※配位…位置や姿勢のこと

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & [\mathrm{m}] \\ x_2 & [\mathrm{m}] \\ \theta & [\mathrm{rad}] \end{bmatrix} \quad \text{とか} \quad \begin{bmatrix} \theta & [\mathrm{rad}] \\ x_1 & [\mathrm{m}] \\ x_2 & [\mathrm{m}] \end{bmatrix}$$

例（直線上の 3 質点の配位）

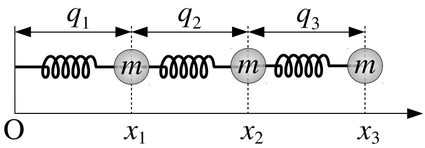




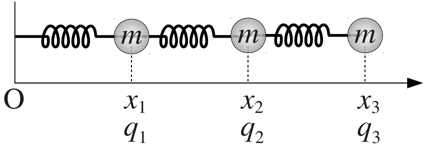
慣性座標と一般化座標

☆ 運動エネルギー T は，まず「慣性座標」で計算！

- 慣性座標…ニュートンの法則 $m\ddot{x} = F$ が成立する座標
  - 一般化座標 $\neq$ 慣性座標の例



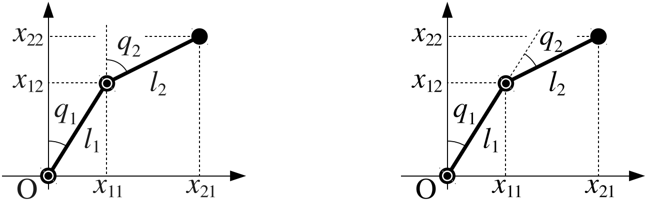
  - 一般化座標 $=$ 慣性座標の例



演習タイム

例題 3.1 (p.19)

2 節リンクの一般化座標 $\boldsymbol{q} = [q_i]$ を 2 種類とる．



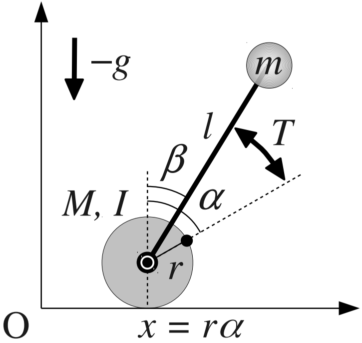
(a) 絶対角方式　　(b) 相対角方式

中間節と先端の座標 $\boldsymbol{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$，$\boldsymbol{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$ について，$\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ への座標変換を求めよ．

車輪型倒立ロボット

例題 3.2 (p.20)

オイラー・ラグランジュ方程式 (8.1) を利用して，車輪型倒立ロボットの運動方程式を導け.



コンピュータ演習

メディア基盤センター「教育用端末室」にて,

- 実習 3.1 を実行せよ.

専門科目「ロボット力学」

第９講
一般化力とその応用

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

- 一般化力
- 一般化力の作用
- 一般化力の座標変換
- 車輪型倒立ロボット
- コンピュータ演習

一般化力 $\boldsymbol{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}_i]$

- 単位を気にせず成分を並べた力ベクトルのこと

例（2 次元剛体の外力）

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}_i] = \begin{bmatrix} F_1 & \text{[N]} \\ F_2 & \text{[N]} \\ T & \text{[N·m]} \end{bmatrix} \tag{9.1a}$$

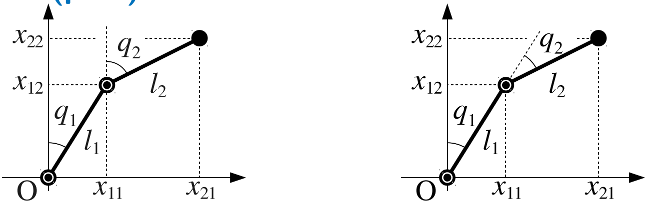
その作用

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 = F_1 & \Longrightarrow & F_1 & \cdots X_1 \text{ を増減させる} \\ m\ddot{X}_2 = F_2 & \Longrightarrow & F_2 & \cdots X_2 \text{ を増減させる} \\ I\ddot{\theta} = T & \Longrightarrow & T & \cdots \theta \text{ を増減させる} \end{cases} \tag{9.1b}$$

☆ 一般化力 $\mathcal{F}_i$ は，対応する一般化座標 q_i を増減させる

一般化力の作用 1/2

例題 3.4 (p.23)



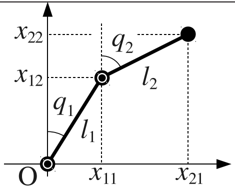
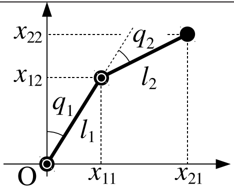
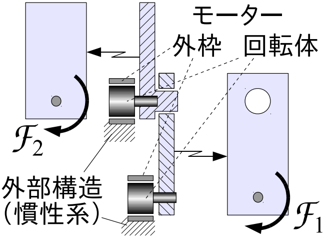
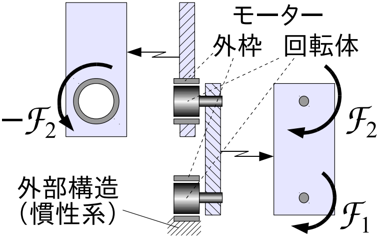
(a) 絶対角方式　　**(b) 相対角方式**

一般化座標 (q_1, q_2) の一般化力 $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ を考える．

1. (a) の $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ は，リンクのどこを増減させるか？
2. (b) の $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ は，リンクのどこを増減させるか？

☆ (b) の $\mathcal{F}_2$ を**関節トルク**という

一般化力の作用 2/2

<table>
<tr><th></th><th>(a) 絶対角方式</th><th>(b) 相対角方式</th></tr>
<tr><td>リンク図</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>機械構造の例</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

一般化力の座標変換

算法 3.1 (p.24)

力と着力点の直交成分 $\boldsymbol{F} = [F_i]$，$\boldsymbol{x} = [x_i]$ をとる．座標変換：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} x_1(q_1, \cdots, q_m) \\ \vdots \\ x_n(q_1, \cdots, q_m) \end{bmatrix} \quad \text{※ } \boldsymbol{q} \text{ は任意の一般化座標} \tag{9.2}$$

に対して，$\boldsymbol{q} = [q_i]$ に関する一般化力 $\boldsymbol{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}_i]$ は次式で求まる．

$$\mathcal{F}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} F_k = \left[\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \right] \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} =: \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i} \right)^T \boldsymbol{F} \tag{9.3}$$

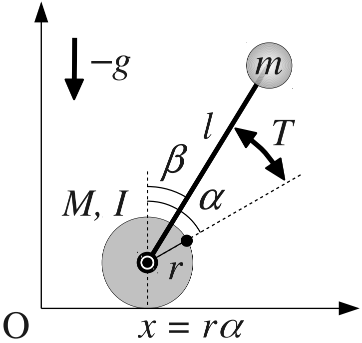
算法 3.2 (p.25)

実は，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{F} \neq$ 直交成分でよい．(別の一般化座標／力でよい)

演習タイム — 車輪型倒立ロボットの一般化力

例題 3.6 (p.25)

関節トルク T が自由度 α, β におよぼす一般化力 $\boldsymbol{\mathcal{F}}_T \equiv (\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)^T$ を求めよ.



コンピュータ演習

- 関節トルク T を受ける車輪型倒立ロボット：

$$\{(M+m)r^2+I\}\ddot{\alpha}+(mlr\cos\beta)\ddot{\beta}-mlr\dot{\beta}^2\sin\beta=\mathcal{F}_\alpha \quad (8.13)$$

$$(mlr\cos\beta)\ddot{\alpha}+ml^2\ddot{\beta}-mgl\sin\beta=\mathcal{F}_\beta \quad (8.14)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}=(\mathcal{F}_\alpha,\mathcal{F}_\beta)=(T,-T) \quad \text{例題 3.6}$$

- フィードバック制御：

$$T=K_1\alpha+K_2\dot{\alpha}+K_3\beta+K_4\dot{\beta} \quad (9.6)$$

  - 原点 $x=r\alpha=0$ に収束する位置制御と，
    倒立姿勢 $\beta=0$ に収束する倒立制御が達成される．

- メディア基盤センターにて，実習 3.2 を実行せよ．
- 【ついでに宿題】次章の実習 3.3 を実行せよ．

専門科目「ロボット力学」

第10講
接触と摩擦（バウンドとスリップ）

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

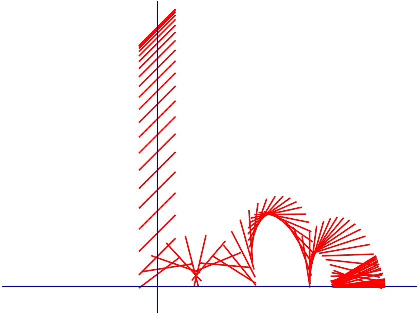
※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

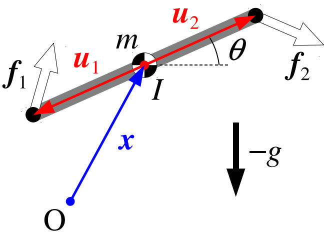
- 床面でバウンドする棒
  - シミュレータを作るには何が必要か？
- 棒の運動方程式
- 垂直抗力の数理モデル
  - ペナルティー法
  - シグモイド関数の活用
- 摩擦の数理モデル

宿題やりましたか？

- 実習 3.3　**Code 5** “stick.m”



床面でバウンドする棒（力学モデル）



- $\boldsymbol{x}$ は重心の位置ベクトル
- θ は棒の傾斜角
- $\boldsymbol{g}$ は重力加速度
- $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ は端点が受ける外力
- $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は着力点の重心からの位置ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{l}{2}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{u}_1$$

- 棒が十分に細い $\Longrightarrow$ 重心まわりの慣性モーメント $I = ml^2/3$

床面でバウンドする棒（運動方程式）

- 重心で力とトルクを集約する．(機械力学 3〜4 章)

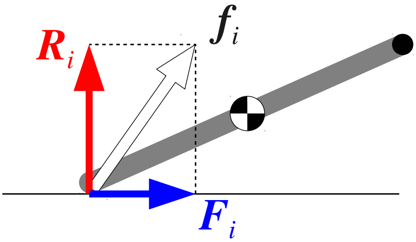
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + m\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{g} = (0, -g)^T$$
$$T = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{u}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2$$

- 剛体の運動方程式に代入する．(機械力学 7 章)

$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + m\boldsymbol{g} & \text{(ニュートン方程式)} \\ J\ddot{\theta} = T = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{u}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 & \text{(オイラー方程式)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 床反力 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を与えれば，運動方程式の完成！

床反力の導入



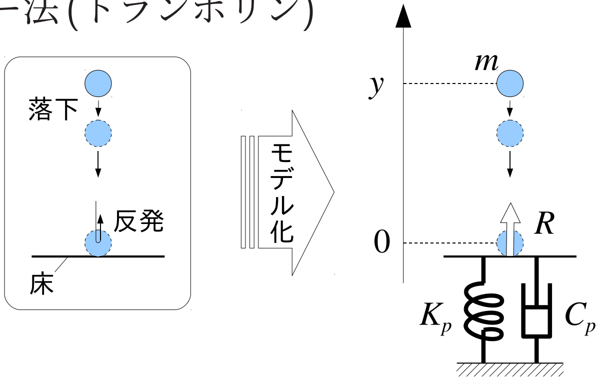
- $\boldsymbol{R}_i$ ・・・ 床の垂直抗力
- $\boldsymbol{F}_i$ ・・・ 床の摩擦力

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{F}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ R_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

$\Longrightarrow$ R_i と F_i を作れたら，運動方程式の完成！

垂直抗力 R の数理モデル

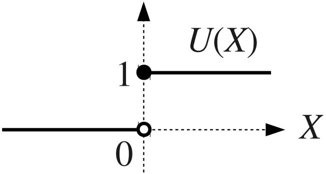
- ペナルティー法(トランポリン)



$$R = R(y,\dot{y}) = \begin{cases} 0 & (y > 0) \\ -K_p y - C_p \dot{y} & (y \leq 0) \end{cases}$$

場合分けを区分関数で書くテク

- 単位ステップ関数



$$U(X) = \begin{cases} 1 & (X \geq 0) \\ 0 & (X < 0) \end{cases}$$

ペナルティー法による垂直抗力

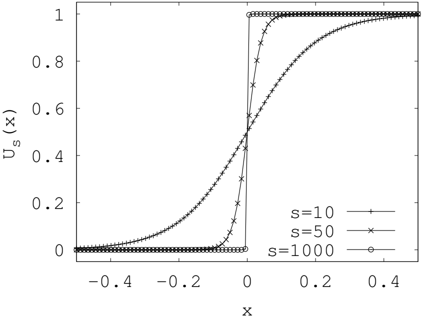
$$R(y, \dot{y}) = U(-y)\{-K_p y - C_p \dot{y}\} = \begin{cases} 0 & (y > 0) \\ -K_p y - C_p \dot{y} & (y \leq 0) \end{cases}$$

y ⋯ 床からの高さ，　$\dot{y}$ ⋯ 床との相対速度 (垂直)

不連続関数を丸めるテク (ステップ関数)

- 不連続関数は，数値積分と相性が悪い (発散など)

$\Longrightarrow$ **シグモイド関数**の活用

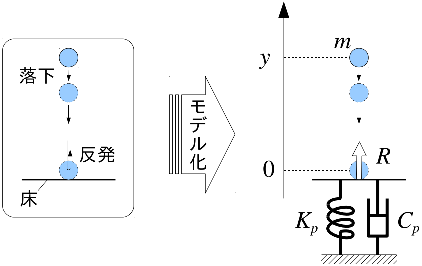


$$U_s(X) := \frac{1}{1+\exp(-sX)}$$

$$U_s(X) \to U(X) \quad (s \to \infty)$$

垂直抗力 R (まとめ)

ペナルティー法による垂直抗力 (丸めたもの)



y ⋯ 床からの高さ

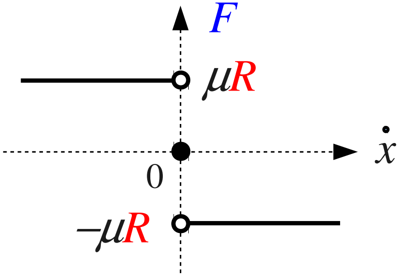
$\dot{y}$ ⋯ 床との相対速度 (垂直)

$$R(y, \dot{y}) = U_s(-y)\{-K_p y - C_p \dot{y}\}$$

- s は計算が発散しない程度に大きくする
- ばね K_p と減衰 C_p を調整し，床の反発特性を設定する

摩擦力 F の数理モデル

- **静止摩擦 ＝ 動摩擦** に単純化すると，クーロン摩擦は,



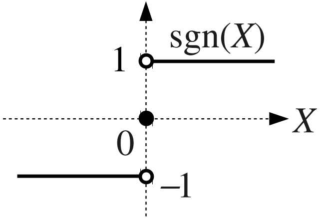
$$F = F(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu R & (\dot{x} > 0) \\ 0 & (\dot{x} = 0) \\ \mu R & (\dot{x} < 0) \end{cases}$$

  - **速度と逆向きの一定力！**

- R ⋯ 床の垂直抗力,　$\dot{x}$ ⋯ 床との相対速度 (水平)

場合分けを区分関数で書くテク

- 符号関数



$$\mathrm{sgn}(X) := \begin{cases} 1 & (X > 0) \\ 0 & (X = 0) \\ -1 & (X < 0) \end{cases}$$

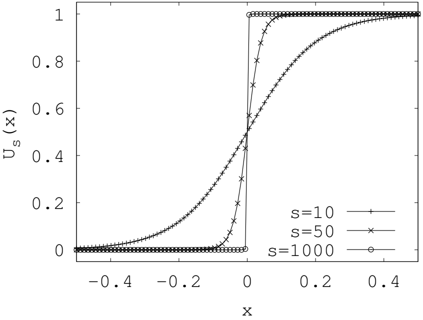
床からのクーロン摩擦力

$$F(\dot{x}) = -\mu R\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu R & (\dot{x} > 0) \\ 0 & (\dot{x} = 0) \\ \mu R & (\dot{x} < 0) \end{cases}$$

不連続関数を丸めるテク (符号関数)

- 不連続関数は，数値積分と相性が悪い (発散など)

$\Longrightarrow$ **シグモイド関数**の活用



$$\mathrm{sgn}_s(X) := 2U_s(X) - 1$$

$$\mathrm{sgn}_s(X) \to \mathrm{sgn}(X) \quad (s \to \infty)$$

摩擦力 F (まとめ)

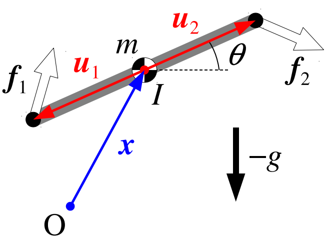
床からのクーロン摩擦力 (丸めたもの)

$$F(\dot{x}) = -\mu R \,\mathsf{sgn}_s(\dot{x})$$

R ⋯ 床からの垂直抗力，　$\dot{x}$ ⋯ 床との摩擦速度

- s を調整すると，床の摩擦特性が変化する．

床面でバウンドする棒（まとめ）



$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + m\boldsymbol{g} \\ J\ddot{\theta} = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{u}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{l}{2}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{u}_1$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{l\dot{\theta}}{2}\begin{bmatrix}\sin\theta \\ -\cos\theta\end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_2 = -\dot{\boldsymbol{u}}_1$$

- 端点：$\boldsymbol{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_i, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{u}}_i$
- 反力：$\boldsymbol{f}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu R_i \,\mathsf{sgn}_s(\dot{x}_i) \\ U_s(-y_i)\{-K_p y_i - C_p \dot{y}_i\} \end{bmatrix}$

以上を解いたのが宿題！

専門科目「ロボット力学」

第11講
床面に転倒する倒立ロボット

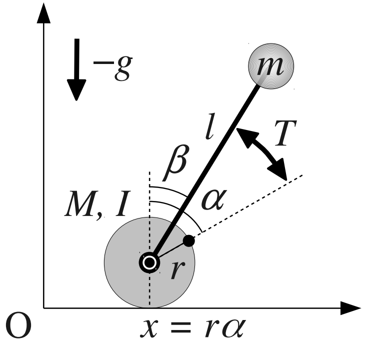
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

- 車輪型倒立ロボット
- 「転倒」を模倣させるのに必要なカラクリ
  - バランスを維持を打ち切る制御則
  - 床面の設定
- 床面に転倒する倒立ロボット
- コンピュータ演習

車輪型倒立ロボット（例題3.2）



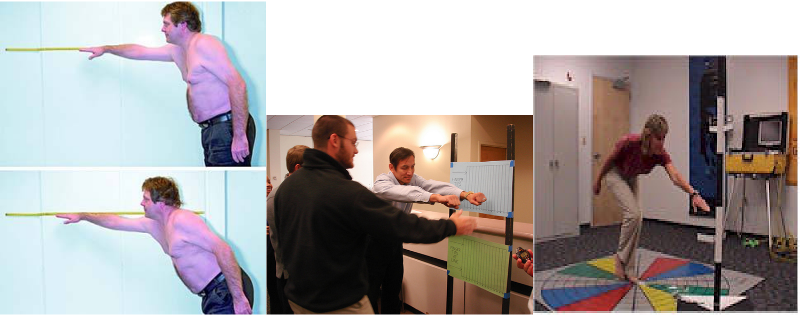
これを転倒させたい！

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (M+m)r^2+I & mlr\cos\beta \\ mlr\cos\beta & ml^2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta}\end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} mlr\dot{\beta}^2\sin\beta \\ mgl\sin\beta \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_\beta\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$$

「転倒」の模倣に必要なカラクリ

1. バランス維持をあきらめる制御則
2. 床

参考：Functional Reach Test (Duncan, 1990)



倒立制御の打ち切り

- 傾斜角 $|\beta|$ が基準値 $\beta_{\max} > 0$ を超えたら制御を止める
  - 場合分けの式

$$T \equiv \begin{cases} K_1\alpha + K_2\dot{\alpha} + K_3\beta + K_4\dot{\beta} & (|\beta| \leq \beta_{\max}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

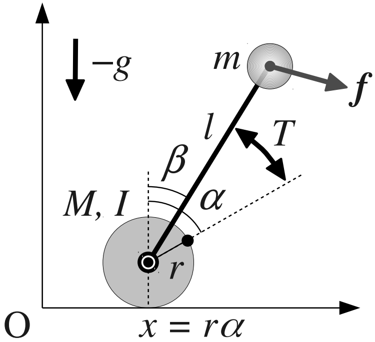
  - 台形関数 (丸めた)： x_0 ⋯ 台形の中心， w ⋯ 台形の幅 (半分)

$$\mathsf{trap}_s(x; x_0, w) \equiv U_s\big(-(x - x0) + w\big) \cdot U_s\big((x - x0) + w\big)$$

倒立制御 (打ち切り付)

$$T \equiv \mathsf{trap}_s(\beta; 0, \beta_{\max}) \cdot (K_1\alpha + K_2\dot{\alpha} + K_3\beta + K_4\dot{\beta})$$

床面の設定 1/3



f を床反力とする！

※質点 m の大きさ (端点の太さ) は無視する

1. 床反力 f をペナルティー法で決める
2. 力 f を，角度 α, β 方向の一般化力に変換する

床面の設定 2/3

- 床反力 $\boldsymbol{f}$ をペナルティー法で決める
  - 振り子先端の直交座標 $(x_m, y_m)^T \Longleftarrow$ 一般化座標 $(\alpha, \beta)^T$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha + l\sin\beta \\ r + l\cos\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} + l\dot{\beta}\cos\beta \\ -l\dot{\beta}\sin\beta \end{bmatrix}$$

  - ペナルティー法

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu R\,\mathsf{sgn}_s(\dot{x}_m) \\ U_s(-y)\{-K_p y_m - C_p \dot{y}_m\} \end{bmatrix}$$

床面の設定 3/3

- 力 $\boldsymbol{f} = (F, R)^T$ を，角度 α, β 方向の一般化に変換
  - 座標変換： $\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha + l\sin\beta \\ r + l\cos\beta \end{bmatrix}$
  - 一般化力 (算法 3.1)

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} & \frac{\partial y_m}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_m}{\partial \beta} & \frac{\partial y_m}{\partial \beta} \end{bmatrix} \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ l\cos\beta & -l\sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}$$

床面に転倒する倒立ロボット (まとめ)

- **運動方程式：**

$$\begin{bmatrix} (M+m)r^2+I & mlr\cos\beta \\ mlr\cos\beta & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mlr\dot{\beta}^2\sin\beta \\ mgl\sin\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_\beta \end{bmatrix}$$

- **座標変換：**

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha + l\sin\beta \\ r + l\cos\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} + l\dot{\beta}\cos\beta \\ -l\dot{\beta}\sin\beta \end{bmatrix}$$

- **床反力 (直交座標，ペナルティー法)：**

$$\begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu R\,\mathsf{sgn}_s(\dot{x}_m) \\ U_s(-y)\{-K_p y_m - C_p\dot{y}_m\} \end{bmatrix}$$

- **床反力 (一般化力)：**

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ l\cos\beta & -l\sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}$$

コンピュータ演習

メディア基盤センター「教育用端末室」にて,

- 実習 3.4 を実行せよ.
- 実習 3.5 を実行せよ.