専門科目「ロボット力学」

第5講
位置ベクトルと座標系

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

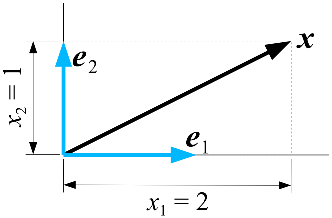
※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

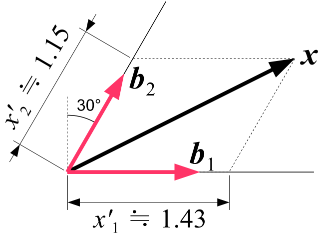
学習目標

- 「機械力学 1 章」の復習
  - ベクトルとその成分
  - 基底の回転
- 3 次元の回転行列
  - 回転軸まわりの回転
  - オイラー角
  - オイラーパラメータ

ベクトルとその成分

- 平面上の幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \nearrow$ (図形) を考える.
- その寸法の測り方を考える.





$\boldsymbol{x}$ の直交成分:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = (1, 2)^T$$

同じ $\boldsymbol{x}$ の斜交成分:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}' = (1.43, 1.15)^T$$

☆ **同じ図形 $\boldsymbol{x} \nearrow$ でも，測り方で寸法は変わる！**

代数化

- 直角な 2 辺を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で表す (長さ 1)

$$\overset{\text{ベクトル}}{\boldsymbol{x}} \xRightarrow{\text{展開}} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \xRightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv \overset{\textbf{直交成分}}{\widetilde{\boldsymbol{x}}} \tag{5.1}$$

- 斜めの 2 辺を単位ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ で表す (長さ 1)

$$\overset{\text{ベクトル}}{\boldsymbol{x}} \xRightarrow{\text{展開}} \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{b}_1 + x'_2\boldsymbol{b}_2 \xRightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \equiv \overset{\textbf{斜交成分}}{\widetilde{\boldsymbol{x}}'} \tag{5.2}$$

一般化

算法 2.1 (p.2)

成分測定用のベクトルの組 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ を，**基底**という．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底 $\mathcal{E}$ で展開する：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \quad \underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{x}} \tag{5.3}$$

展開係数 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ を，$\boldsymbol{x}$ の**成分**という．

【表記】 $\mathcal{E}$ で測った $\boldsymbol{x}$ の成分を，$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}$ と書く．

☆ n 次元でも同様に考える．

実習2.1 p3

1. 基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ で測った,
   ベクトル $\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ の成分 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{\mathcal{E}}$ を求めよ.
2. 基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ で測った,
   ベクトル $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ の成分 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{E}}$ を求めよ.
3. 基底 $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ で測った,
   ベクトル $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ の成分 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_{\mathcal{B}}$ を求めよ.

解答例

1. $\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \quad \underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}_{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = 0\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \quad \underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}_{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = \frac{3}{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) - \frac{3}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + 2\boldsymbol{k}$

$$\underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \widetilde{\boldsymbol{w}}_{\langle \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

基底の回転

- 平面上に正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \rangle$ をとる.
- これを角度 θ だけ回したものを次式で表す.

$$R_\theta(\mathcal{E}) := \langle R_\theta(\boldsymbol{i}), R_\theta(\boldsymbol{j}) \rangle \tag{5.4}$$

- 作図より,

$$\begin{cases} R_\theta(\boldsymbol{i}) = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j} \\ R_\theta(\boldsymbol{j}) = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{5.5}$$

例題 2.2 (p.3)

ノートに作図せよ.

2次元の回転行列 $[R_\theta]$ (1/2)

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{x} \arrow[r, "\text{変換 } R_\theta"'] \arrow[dl, "\mathcal{E}"'] & \boldsymbol{y} = R_\theta(\boldsymbol{x}) \arrow[dr, "\mathcal{E}"] & \\
\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \arrow[rrr, "\text{行列 } [R_\theta]"] & & & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}
$$

- 行列の成分を求める. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{i} + y_2 \boldsymbol{j} \quad &= R_\theta(\boldsymbol{x}) = R_\theta(x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j}) \\
&= x_1 R(\boldsymbol{i}) + x_2 R(\boldsymbol{j}) \qquad \swarrow \text{前のスライド} \\
&= x_1(\cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j}) + x_2(-\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j}) \\
&= (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)\boldsymbol{i} + (x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

2次元の回転行列 $[R_\theta]$ (2/2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{[R_\theta]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}}$$

- すなわち，$\widetilde{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{E}} = [R_\theta]\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}$ が成立する.
- 行列 $[R_\theta]$ を (2 次元の) 回転行列という.

基底の回転による座標の変化 (1/2)

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{x} \arrow[dl, "R(\mathcal{E})"'] \arrow[dr, "\mathcal{E}"] & \\
\widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \arrow[rr, "行列"', "{[\ ?\ ]}"] & & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}
$$

- 行列の成分を求める. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x} = x'R(\boldsymbol{i}) + y'R(\boldsymbol{j})$$ ⇙ 前のスライド

$$= x'(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}) + y'(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$

$$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)\boldsymbol{i} + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

$$= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

基底の回転による座標の変化 (2/2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{回転行列 } [R_\theta]} \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})}}$$

算法 2.2 (p.4)

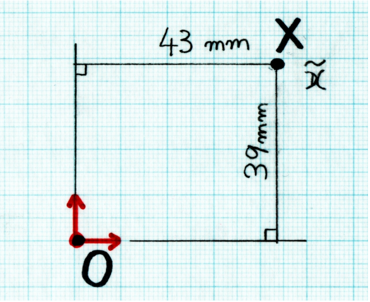
$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} = [R_\theta]\,\widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})} \quad \text{または} \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})} = [R_\theta]^{-1}\,\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} \qquad (5.9)$$

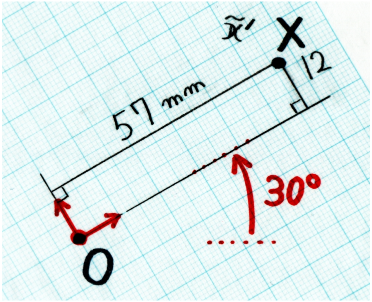
☆ 「回した基底で測った成分」
＝ 「元の基底で測った成分」を逆回転させたもの

次の実習で実感 ⇒⇒

実習2.3, p3

正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \rangle$ と，これを 30° だけ回した基底 $R_{30^\circ}(\mathcal{E}) = \langle R_{30^\circ}(\boldsymbol{i}), R_{30^\circ}(\boldsymbol{j}) \rangle$ をとる．あるベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_{30^\circ}(\mathcal{E})} = (57, 12)^T$ であるとき，$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}$ を求めよ．





3次元の回転行列

- 3次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ をとる．
- 3次元の基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ もとる．
- 3次元の回転変換 R で基底を回す．

$$R(\mathcal{E}) \equiv \langle R(\boldsymbol{i}), R(\boldsymbol{j}), R(\boldsymbol{k}) \rangle$$

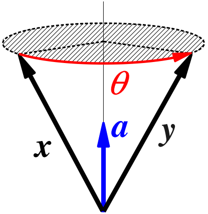
- 2次元と同じ算法が成立．でも， $[R] = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$

算法 2.2 (p.4)

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} = [R_\theta]\, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})} \quad \text{または} \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_{R_\theta(\mathcal{E})} = [R_\theta]^{-1}\, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} \qquad (5.9)$$

3次元の回転変換　(1/2)

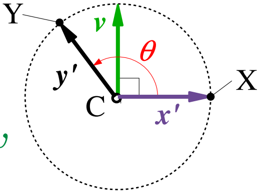
- 回転軸 $\boldsymbol{a}$ まわりに角度 θ 回す変換：

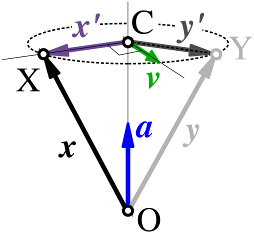


$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = R(\boldsymbol{x}) :=& (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} \\ &+ \cos\theta\{\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\} \\ &+ \sin\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (5.11)$$

- 導出方法
  - 円盤上の幾何：

$$\boldsymbol{y}' = \cos\theta\,\boldsymbol{x}' + \sin\theta\,\boldsymbol{v}$$





3次元の回転変換　(2/2)

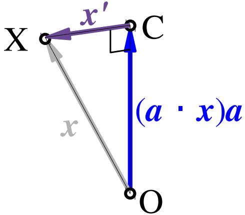
- 導出方法(続き)
  - ベクトル $\boldsymbol{x}'$：

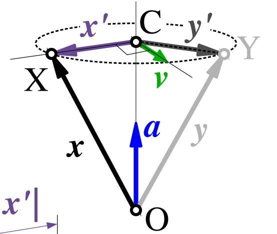
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$$

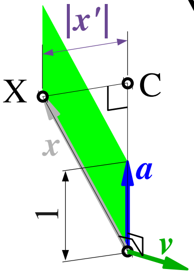
  - ベクトル $\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} \quad \text{(クロス積)}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \textbf{平行四辺形の面積} = |\boldsymbol{x}'|$$







ゆえに　$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}'$

$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} + \cos\theta\,\boldsymbol{x}' + \sin\theta\,\boldsymbol{v}$$

$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} + \cos\theta\{\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\} + \sin\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$$

回転変換 R の行列表示 $[R]$ (1/3)

- 回転変換 $\boldsymbol{y} = R(\boldsymbol{x})$ は**線形変換**：

$$\iff \begin{cases} R(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = R(\boldsymbol{u}) + R(\boldsymbol{v}) \\ R(a\boldsymbol{u}) = aR(\boldsymbol{u}) \text{ ※ } a \text{ はスカラ} \end{cases} \quad \text{を満す}$$

- **線形変換**は必ず行列でも表せる： $R(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$
- 成分の求め方：
  - A の 1 列目： $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
  - A の 2 列目： $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$
  - A の 3 列目： $\begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

回転変換 R の行列表示 $[R]$ (2/3)

- 回転変換： $\boldsymbol{y} = R(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} + \cos\theta\{\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\} + \sin\theta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$$

- A の 1 列目： $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \iff$ **代入** $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\left(\boldsymbol{a}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{a} = (a_1)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1a_2 \\ a_1a_3 \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{a}\times\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix}$ **機械力学 (3.11)**

$$\therefore \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1a_2 \\ a_1a_3 \end{bmatrix} + \cos\theta\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_1a_2 \\ a_1a_3 \end{bmatrix}\right\} + \sin\theta\begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2+\cos\theta(1-a_1^2) \\ a_1a_2+\cos\theta(1-a_1a_2)+a_3\sin\theta \\ a_1a_3+\cos\theta(1-a_1a_3)-a_2\sin\theta \end{bmatrix}$$

- **追加の例題**： 同様にして A の 2 列目，3 列目を求めよ．

回転変換 R の行列表示 $[R]$ (3/3)

- 回転行列 $[R] = [R(a_1, a_2, a_3, \theta)]$ の成分：

$$[R] = \begin{bmatrix} a_1^2+(1-a_1^2)C_\theta & a_1a_2(1-C_\theta)-a_3S_\theta & a_1a_3(1-C_\theta)+a_2S_\theta \\ a_1a_2(1-C_\theta)+a_3S_\theta & a_2^2+(1-a_2^2)C_\theta & a_2a_3(1-C_\theta)-a_1S_\theta \\ a_1a_3(1-C_\theta)-a_2S_\theta & a_2a_3(1-C_\theta)+a_1S_\theta & a_3^2+(1-{a_3}^2)C_\theta \end{bmatrix}$$

ただし，$S_\theta \equiv \sin\theta$，$C_\theta \equiv \cos\theta$. (5.13)

- 各軸まわりの回転：
  - x 軸まわり $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [R_x(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{bmatrix}$
  - y 軸まわり $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [R_y(\theta)] = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix}$
  - z 軸まわり $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow [R_x(\theta)] = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5.14)

回転行列のパラメータ表示

- 回転行列は$3 \times 3 = 9$成分．3次元回転の自由度は$3 < 9$
- 3パラメータ (オイラー角)：※ジンバルロックが発生 (泣)
  - **ロール・ピッチ・ヨー角**：(ϕ, θ, ψ)

$$\Longrightarrow [R] = [R_x(\phi)]\,[R_y(\theta)]\,[R_z(\psi)]$$

- 4パラメータ：※ジンバルロックは起きない (笑)
  - **回転軸と回転角**：$(\overset{\text{回転軸}}{a_1, a_2, a_3}, \overset{\text{角}}{\theta}) \Longrightarrow [R] =$ 前のスライド
  - **オイラーパラメータ**：$(q_0, q_1, q_2, q_3) \equiv \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ a_1 \sin(\theta/2) \\ a_2 \sin(\theta/2) \\ a_3 \sin(\theta/2) \end{bmatrix}^T$ (5.15)

$$\Longrightarrow [R] = \begin{bmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & 1-2q_1^2-2q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

専門科目「ロボット力学」

第6講
多体系の運動学

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

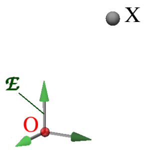
- 座標系と空間座標
  - 位置ベクトル
  - 空間座標
- 部品図と組立図
  - 部品図 — 局所座標系
  - 組立図 — 基準座標系
- 部品図から組立図への座標変換
  - アフィン変換
  - コンピュータ演習

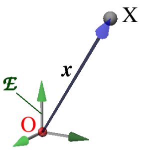
座標系と空間座標

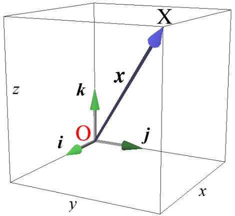
点 X の空間座標 $\widetilde{\mathrm{X}}_{(\mathrm{O},\mathcal{E})}$

1. 測定基準点 O と基底 $\mathcal{E}$ の組 $(\mathrm{O},\mathcal{E})$ を**座標系**という．
2. O〜X に矢印 $\boldsymbol{x}$ を引く． $\boldsymbol{x}$ を**位置ベクトル**という．
3. $\boldsymbol{x}$ の成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}$ を $(\mathrm{O},\mathcal{E})$ で測った X の**空間座標**という．

【表記】 $\widetilde{\mathrm{X}}_{(\mathrm{O},\mathcal{E})} \equiv \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

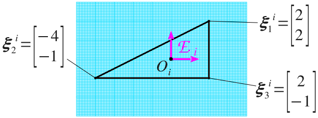




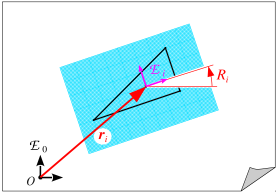


部品図と組立図

1. 《局所座標》部品図で部品を座標データ化する．



2. 《基準座標》組立図に配置する．　※平行移動＋回転



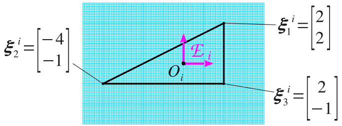
3. 《座標変換》組立図上の座標は？

部品図《局所座標系》

☆ 分野に応じて，車両／機体／ロボット座標系という言い方もする

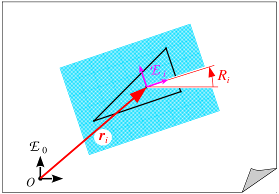
- 各部品の形状を，座標データ化する．
  1. 部品ごとに専用の部品図を用意する．
  2. その部品図に，直交座標系 $\mathcal{R}_i = \langle \mathrm{O}_1, \mathcal{E}_i \rangle$ を設置する．
  3. 部品の適当な代表点の組 $\{\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_k\}$ を，
     $\mathcal{R}_i$ による座標データの組 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i := \{\boldsymbol{\xi}_1^i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k^i\}$ として記録する．

例



$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_i = \{\boldsymbol{\xi}_1^i, \boldsymbol{\xi}_2^i, \boldsymbol{\xi}_3^i\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

組立図《基準座標系》



- 部品を組立図に配置する．
  1. 組立図に直交座標系 $\mathcal{R}_0 = (\mathrm{O}, \mathcal{E})$ を貼る．
  2. 部品図 $\mathcal{R}_i = (\mathrm{O}_i, \mathcal{E}_i)$ の位置を，
     組立図 $\mathcal{R}_0$ 上の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{\mathrm{OO}_i}$ で表す．
  3. 部品図 $\mathcal{R}_i = (\mathrm{O}_i, \mathcal{E}_i)$ の姿勢を，回転変換 R_i で表す．

  ※ R_i は，$\mathcal{E}$ を回して $\mathcal{E}_i = R_i(\mathcal{E})$ を作る回転変換．

  4. 組立図 $\mathcal{R}_0$ に対する部品図 $\mathcal{R}_i$ の配置を，ペア $(\boldsymbol{r}_i, R_i)$ で表す．

座標変換：《部品図》$\mapsto$《組立図》

算法 2.3 (p.8)

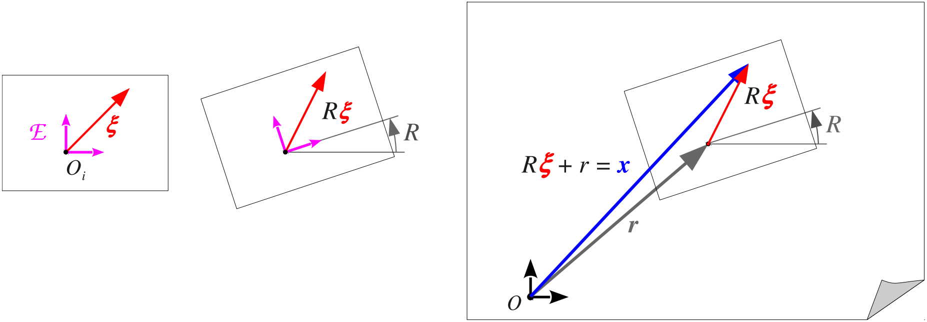
組立座標系に対する部品座標系の配置を $(\boldsymbol{r}, R)$ とする．このとき，部品座標 $\boldsymbol{\xi}$ が指す点は，組立座標：

$$\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{r} \tag{1}$$

の位置にくる．このような，回してから平行移動する変換を，**アフィン変換** (affine trasformation) という．

作図による証明 ($\boldsymbol{x} = R\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{r}$)

1. 部品図上のベクトル $\boldsymbol{\xi}$
2. まず部品図を回す　$\boldsymbol{\xi} \mapsto R\boldsymbol{\xi}$
3. 次に平行移動する　$R\boldsymbol{\xi} \mapsto R\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{x}$



コンピュータ演習

メディア基盤センター「教育用端末室」にて,

- 実習 2.4 を実行せよ.

専門科目「ロボット力学」

第７講
ロボット運動学

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

※レポート用紙・教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/robo/

学習目標

- アフィン変換の行列表示
  - 同次変換行列
- ロボット・マニピュレータ
  - ４自由度マニピュレータ
  - コンピュータ演習

アフィン変換の行列表示(2次元)

- アフィン変換の復習（回して平行移動）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\text{回転行列}} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}}_{\text{平行移動}} \tag{7.1a}$$

- ダミー成分 **1** を追加する．同次変換という．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & r_1 \\ R_{21} & R_{22} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{7.2a}$$

☆ 回転&平行移動を，１つの行列 H で表せる！

演習タイム — 実習2.5(前半)

例題 2.5 前半 (p.9)

行列とベクトルの積を実行し，式(7.1a)と式(7.2a)の成分の一致を確かめよ．

同次変換行列 H の例 (2 次元)

※ $C_\theta := \cos\theta,\ S_\theta := \sin\theta$

作用	表記	成分
平行移動	$\mathsf{Trans}([r_i])$ または $\mathsf{Trans}(r_1, r_2)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
回転	$\mathsf{Rot}(\theta)$	$\begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
拡大縮小	$\mathsf{Scal}(\alpha, \beta)$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

アフィン変換の行列表示(3次元)

- アフィン変換（回して平行移動）

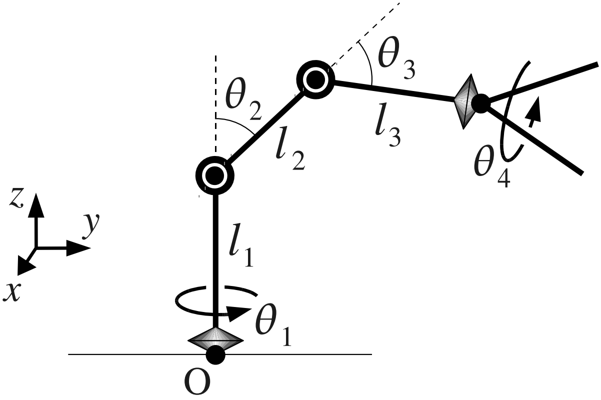
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \tag{7.1b}$$

- 同次変換（ダミー成分 **1** を追加する）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & r_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & r_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{7.2b}$$

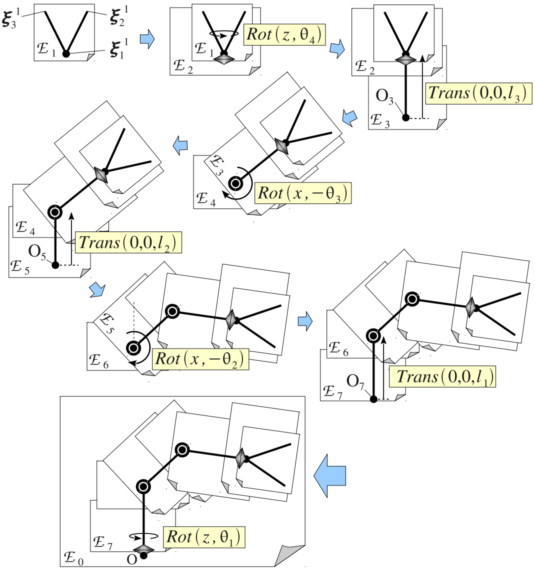
ロボットマニピュレータ

- 4 自由度マニピュレータ



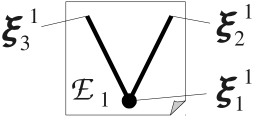
- 関節角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ から，各部の基準座標を求める！

運動学の概要 (図5, p11)



運動学の数式表現 1/4

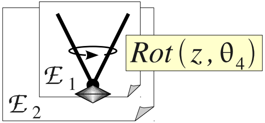
1. 手先の部品図（座標系 $\mathcal{E}_1$）．代表 3 点.



局所座標による形状データ

$$\mathcal{X}_1 = \{\boldsymbol{\xi}_1^1, \boldsymbol{\xi}_2^1, \boldsymbol{\xi}_3^1\} \tag{7.3}$$

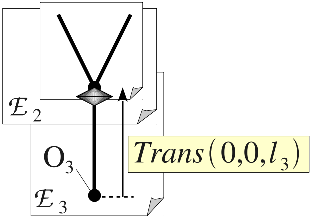
2. 「手先 $\mathcal{X}_1$」を手首の部品図（$\mathcal{E}_2$）上で回転.



$$\mathcal{X}_2 = R_2\mathcal{X}_1 := \{R_2\boldsymbol{\xi}_1^1,\ R_2\boldsymbol{\xi}_2^1,\ R_2\boldsymbol{\xi}_3^1\},$$
$$R_2 := \mathrm{Rot}(z, \theta_4) \tag{7.4}$$

運動学の数式表現 2/4

3. 「手首から先 $\mathcal{X}_2$」を肘の部品図（$\mathcal{E}_3$）上で平行移動.

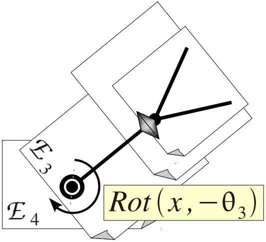


$$\mathcal{X}_3 = \{T_3\mathcal{X}_2, \mathbb{O}\}$$ 肘 O_3 を追加

$$= \{T_3R_2\boldsymbol{\xi}_1^1,\ T_3R_2\boldsymbol{\xi}_2^1,\ T_3R_2\boldsymbol{\xi}_3^1,\ \mathbb{O}\}$$

$$T_3 := \mathsf{Trans}(0,0,l_3) \quad (7.5)$$

4. 「肘から先 $\mathcal{X}_3$」を上腕の部品図（$\mathcal{E}_4$）上で回転.

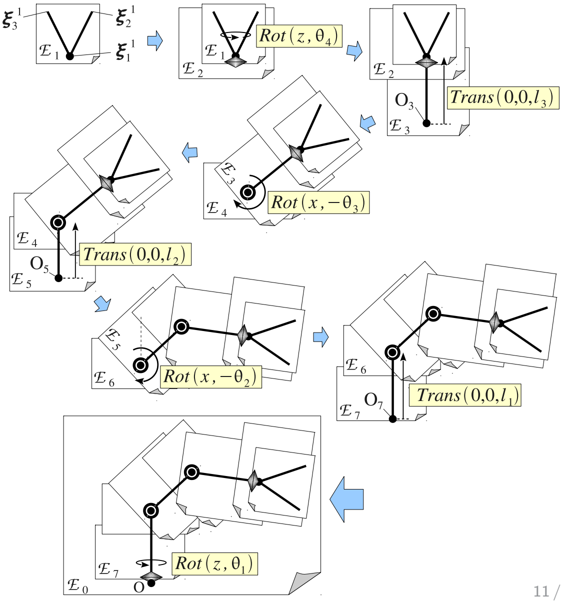


$$\mathcal{X}_4 = R_4\mathcal{X}_3 = \{R_4T_3R_2\boldsymbol{\xi}_1^1,$$
$$R_4T_3R_2\boldsymbol{\xi}_2^1, R_4T_3R_2\boldsymbol{\xi}_3^1,\ \mathbb{O}\},$$

$$R_4 := \mathsf{Rot}(x,-\theta_3) \quad (7.6)$$

運動学の数式表現 3/4

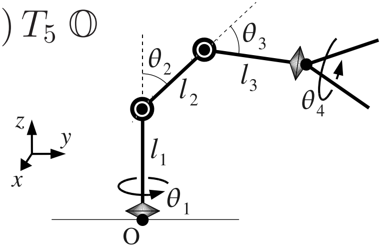
5〜8. 同様に,
式 (7.7)〜(7.10)
を得る.



運動学の数式表現 4/4

- 各部の基準座標（組立図上の位置）

$$
\begin{cases}
\xi_1^0 = R_8(\theta_1)\,T_7\,R_6(\theta_2)\,T_5\,R_4(\theta_3)\,T_3\,R_2(\theta_4)\,\xi_1^1 & \text{※手首} \\
\xi_2^0 = R_8(\theta_1)\,T_7\,R_6(\theta_2)\,T_5\,R_4(\theta_3)\,T_3\,R_2(\theta_4)\,\xi_2^1 & \text{※手先 1} \\
\xi_3^0 = R_8(\theta_1)\,T_7\,R_6(\theta_2)\,T_5\,R_4(\theta_3)\,T_3\,R_2(\theta_4)\,\xi_3^1 & \text{※手先 2} \\
\xi_4^0 = R_8(\theta_1)\,T_7\,R_6(\theta_2)\,T_5\,\mathbb{O} & \text{※肘} \\
\xi_5^0 = R_8(\theta_1)\,T_7\,\mathbb{O} & \text{※肩} \\
\xi_6^0 = \mathbb{O} & \text{※根本}
\end{cases}
\tag{7.11}
$$



コンピュータ演習

メディア基盤センター「教育用端末室」にて,

- 実習 2.6 を実行せよ.
- 実習 2.7 を実行せよ.