第 10 回 機械力学

運動量の保存則

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

学習目標

運動方程式を解かずに，運動を調べる１つ目の方法

- **質点系の保存則（運動量，角運動量）**
- **「質点系」の集合への拡張**
- **「剛体」への拡張**
- **「質点系」と「剛体」が混在する場合**

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

運動量の保存則（作り方）

外力＝０ のときに成立する運動の法則

運動量の保存（質点）

保存量 ☆ の見付け方

☆が保存する $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 時間変化しない $\therefore$ $\frac{d}{dt}(☆) = 0$ となる☆を探す

質点の場合 外力 $= \mathbb{O}$

- 運動方程式： $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \mathbb{O} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{O}$ $\quad\therefore\ \dot{\boldsymbol{x}} =$ 定数
- 結論： 外力を受けない質点は「速度」を保存する.

運動量の保存（2 質点系）

保存量 ☆ の見付け方

☆が保存する $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 時間変化しない $\therefore$ $\frac{d}{dt}(☆) = 0$ となる☆を探す

2 質点系の場合　外力 $= \mathbb{O}$ だが，内力 $\neq \mathbb{O}$ とする

- 運動方程式：　$m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}, \quad m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = -\boldsymbol{f}$
- 「$= \mathbb{O}$」を作るために総和：

$$m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} = \mathbb{O} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2) = \mathbb{O}$$

- 結論：外力を受けない 2 質点系は $\boldsymbol{P} := m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2$ を保存する．
- 保存する $\boldsymbol{P}$ を **全運動量** という．各 $\boldsymbol{p}_i = m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i$ を **運動量** という．

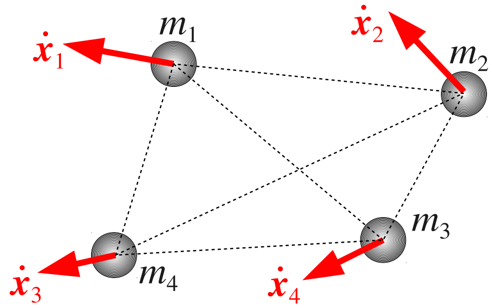
運動量の保存（N 質点系）

3 質点系の場合（外力 $= \mathbb{O}$）

- 全運動量 $\boldsymbol{P} = m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{x}}_3$ は保存する．

4 質点系の場合（外力 $= \mathbb{O}$）

- 全運動量 $\boldsymbol{P} = m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{x}}_3 + m_4\dot{\boldsymbol{x}}_4$ は保存する．



力学法則 9.1 (p.88)

外力を受けない N 質点系の全運動量，

$$\boldsymbol{P} := m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2 + \cdots + m_N\dot{\boldsymbol{x}}_N \tag{9.3}$$

は保存する (時間変化しない)．

演習タイム 1/2

- **例題 9.1 p.88 （弾速測定器 — Step 1）**

角運動量の保存（2 質点系）

保存量 ☆ の見付け方

☆が保存する $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 時間変化しない $\therefore$ $\frac{d}{dt}(☆) = 0$ となる☆を探す

2 質点系の場合 **外力 $= \mathbb{O}$ だが，内力 $\neq \mathbb{O}$ とする**

- 角運動方程式： $m_1\boldsymbol{x}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{f}, \quad m_2\boldsymbol{x}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{x}_2 \wedge (-\boldsymbol{f})$
- 総和： $m_1\boldsymbol{x}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_2 =$ 内力トルクの総和 $= \mathbb{O}$

$$= \frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{x}_1 \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_2) = \mathbb{O} \quad \because \boldsymbol{x}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}_i \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_i)$$

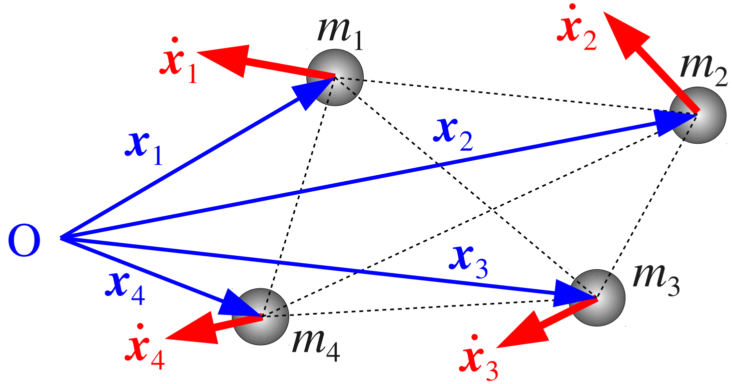
- 外力を受けない 2 質点系は $L := m_1\boldsymbol{x}_1 \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_2$ を保存.
- L を **全角運動量** という．各 $l_i = m_i\boldsymbol{x}_i \wedge \dot{\boldsymbol{x}}_i$ を **角運動量** という.

角運動量の保存（N 質点系）

力学法則 9.2 (p.89)

外力を受けない N 質点系の全角運動量 L は保存する．

$$L := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \wedge (m_i \dot{\boldsymbol{x}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \wedge \boldsymbol{p}_i \tag{9.4}$$



内力の影響なし

力学法則 9.3 (p.89)

内力の有無や種類は，**運動量・角運動量の保存則**には影響しない．

$\because$ **内力を総和・相殺して見付けた保存則だから！**

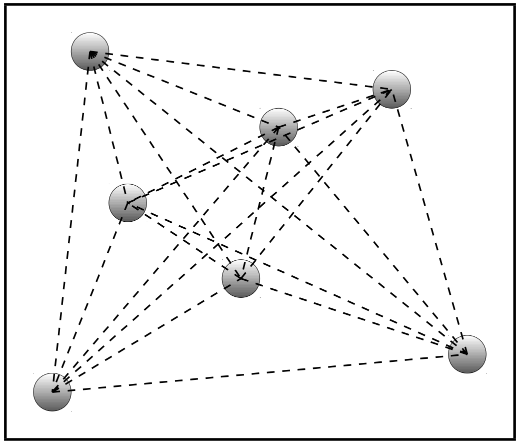
$$\frac{\mathrm{d}(\textbf{運動量})}{\mathrm{dt}} = m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \textbf{内力の総和} = \mathbb{O}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\textbf{角運動量})}{\mathrm{dt}} = m_1\boldsymbol{x}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \textbf{内力トルクの総和} = \mathbb{O}$$

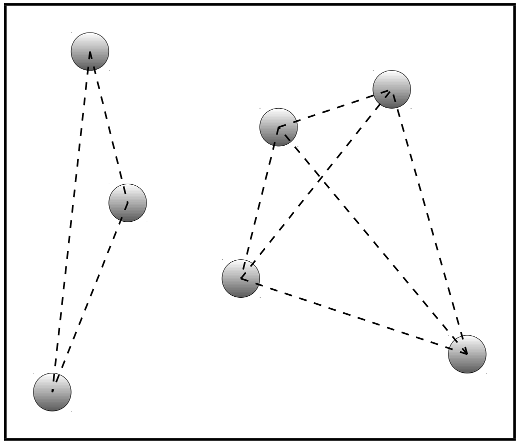
「質点系」の集合への拡張

運動量の分解

- 外力のない 7 質点系を考える．
- 運動量の保存則に，内力 (リンク) の有無・形態は，無関係なので，



を分離して



としても，同じ $P = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + \cdots + m_6\dot{x}_6 + m_7\dot{x}_7$ が保存．

- 外力のない質点系の分離だから，分離後も外力はない．

$$\therefore \quad \begin{cases} P_A = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_3 \\ P_B = m_4\dot{x}_4 + m_5\dot{x}_5 + m_6\dot{x}_6 + m_7\dot{x}_7 \end{cases}$$

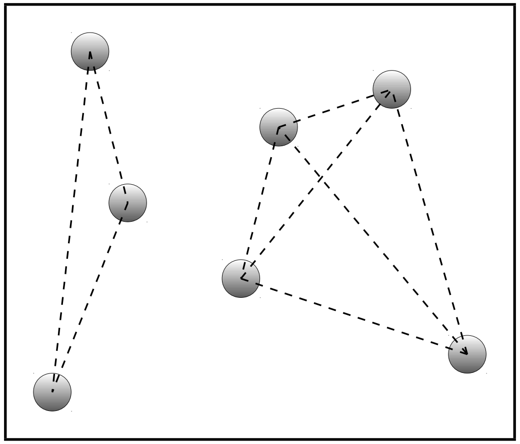
がそれぞれ保存．

運動量の合成（分解の逆）

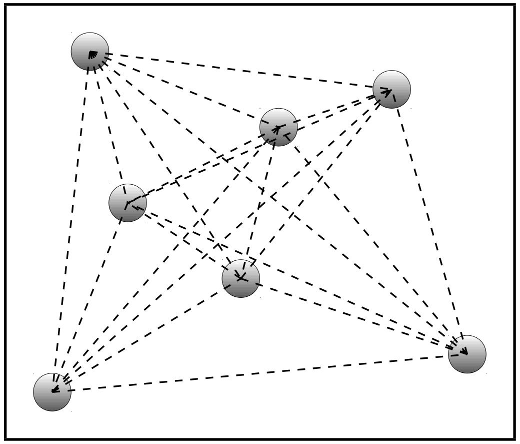
- 外力のない 3 質点系と，4 質点系を考える．

それぞれ $\begin{cases} \boldsymbol{P}_A = m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{x}}_3 \\ \boldsymbol{P}_B = m_4\dot{\boldsymbol{x}}_4 + m_5\dot{\boldsymbol{x}}_5 + m_6\dot{\boldsymbol{x}}_6 + m_7\dot{\boldsymbol{x}}_7 \end{cases}$ を保存する．

- 運動量の保存則に，内力 (リンク) の有無・形態は，無関係なので，



を合成した



の運動量 $\boldsymbol{P} = m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + \cdots + m_7\dot{\boldsymbol{x}}_7 = \boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_B$ もまた保存する．

運動量・角運動量の保存則 — 「質点系」の集合

角運動量も同様に合成・分解できるので ⋯

力学法則 9.4 (p.90)

外力のない質点系を M 個考える．それぞれの全運動量が $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_M$，全角運動量が $L_1, \cdots, L_M$ のとき，それらの合計，

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{P}_j, \qquad L = \sum_{j=1}^{M} L_j \tag{9.5}$$

は保存する (時間変化しない).

剛体への拡張

運動量の保存に，内力の有無・形態は無関係！

⇩

リンク長を固定したスケルトン＝剛体

の運動量・角運動量は保存する．

剛体の運動量・角運動量

外力のない剛体の運動方程式（ニュートン・オイラー方程式）

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \mathbb{O}, \qquad I\ddot{\theta} = 0$$

保存量：

$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \frac{d}{dt}(M\dot{\boldsymbol{X}}) = \mathbb{O} \Longrightarrow \boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{X}}$ **運動量 (定ベク)**

$I\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = 0 \Longrightarrow L = I\dot{\theta}$ **角運動量 (定数)**

算法 9.1 (p.90)

重心 $\boldsymbol{X}$，姿勢角 θ，質量 M，慣性モーメント I の剛体の運動量 $\boldsymbol{P}$ と，角運動量 L は,

$$\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{X}}, \qquad L = I\dot{\theta} \tag{9.6}$$

質点系と剛体が混在する場合

力学法則 9.4 再掲 (p.90)

外力のない質点系を M 個考える．それぞれの全運動量が $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_M$，全角運動量が $L_1, \cdots, L_M$ のとき，それらの合計，

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{P}_j, \qquad L = \sum_{j=1}^{M} L_j \tag{9.5}$$

は保存する (時間変化しない).

- **j 番目の質点系が「剛体」のときは，算法 9.1 p.90 で計算した，**

$$\boldsymbol{P}_j = M\dot{\boldsymbol{X}}, \qquad L_j = I\dot{\theta} \tag{9.6}$$

を代入すればよい．

演習タイム 2/2

- **例題 9.2 p.91 （はずみ車の急制動による振り上げ — Step 1）**
- **問題 9.1 p.91**
- **問題 9.2 p.92**