第 9 回 機械力学

剛体の運動 2

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

学習目標

- **角運動法則の導出（作り方）**
  - 重心まわりの位置ベクトル
  - 質点 (1 個) および質点系 (N 個) の角運動
  - 剛体の回転運動（特殊な角運動）
- **慣性モーメント**
  - 離散剛体
  - 平行軸の定理
  - 連続剛体
- **斜面を転がる球**

学習方法

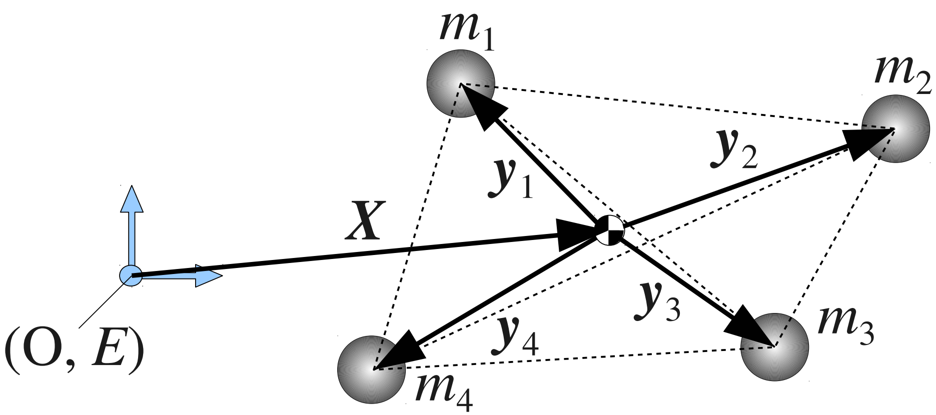
全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

角運動法則の導出（作り方）

角運動 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ **角度の運動**

重心まわりの位置ベクトル

$(O, \mathcal{E})$ は慣性系．重心 $\boldsymbol{X}$ から位置ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots$ をとる



$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}_i \quad (8.1)$$

算法 8.1 (p.76)

質点系の重心から測った各質点の位置ベクトル $\boldsymbol{y}_i$ について，

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{y}_i = \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{y}}_i = \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{y}}_i = \mathbb{O}. \qquad (8.2)$$

演習タイム 1/3

追加の例題

- 質量が m_1, m_2 で位置が $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の 2 質点系について,

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = \dfrac{m_1 \boldsymbol{x}_1 + m_2 \boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2} & \text{(重心)} \\ \boldsymbol{y}_1 := \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{X} & \text{(重心からの位置ベクトル)} \\ \boldsymbol{y}_2 := \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{X} & \text{(重心からの位置ベクトル)} \end{cases}$$

  とする.

- $\boldsymbol{z} = m_1 \boldsymbol{y}_1 + m_2 \boldsymbol{y}_2$ を計算せよ.

証明

算法 8.1 (p.76)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{y}_i = \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{y}}_i = \mathbb{O}, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{y}}_i = \mathbb{O}. \tag{8.2}$$

証明

「$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}_i$」の両辺に m_i を乗じて総和すると,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{X} + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{y}_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{y}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{X} = \underbrace{M\boldsymbol{X}}_{\text{算法 5.1 p.45}} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{\text{全質量 } M} \boldsymbol{X} = \mathbb{O} \,/\!/$$

この両辺を時間微分したのが，第 2 式，第 3 式.

各質点の角運動方程式 1/2

外力と内力を「トルク」に変形する

運動方程式 $$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{ij} \quad \text{[N]}$$

両辺を「$\boldsymbol{y}_i \wedge$」 ⇩ **外力と内力が重心に発生するトルク**

角運動方程式 $$\boldsymbol{y}_i \wedge \left(m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i \right) = \boldsymbol{y}_i \wedge \left(\boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{ij} \right) \quad \text{[Nm]}$$

$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{y}_i$ を代入．$\wedge$ の分配則

$$\Longrightarrow \quad m_i \, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_i \, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i = \boldsymbol{y}_i \wedge \boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{y}_i \wedge \boldsymbol{f}_{ij} \;/\!\!/$$

各質点の角運動方程式 2/2

$$m_1\, \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_1\, \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_{1j}$$

$$m_2\, \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_2\, \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_{2j}$$

$$m_3\, \boldsymbol{y}_3 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_3\, \boldsymbol{y}_3 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_3 = \boldsymbol{y}_3 \wedge \boldsymbol{f}_3 + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{y}_3 \wedge \boldsymbol{f}_{3j}$$

$$m_4\, \boldsymbol{y}_4 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_4\, \boldsymbol{y}_4 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_4 = \boldsymbol{y}_4 \wedge \boldsymbol{f}_4 + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{y}_4 \wedge \boldsymbol{f}_{4j}$$

$$\vdots$$

なんだこれ？

$\Rightarrow$ 全部足して，1 本にして考える

演習タイム 2/3

追加の例題

- **2 質点系の角運動方程式を，辺々総和せよ．**

$$\begin{cases} m_1 \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_1 \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_{12} \\ m_2 \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_2 \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_{21} \end{cases}$$

- **3 質点系の角運動方程式を，辺々総和せよ．**

$$\begin{cases} m_1 \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_1 \boldsymbol{y}_1 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{f}_{13} \\ m_2 \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_2 \boldsymbol{y}_2 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_2 = \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{y}_2 \wedge \boldsymbol{f}_{23} \\ m_3 \boldsymbol{y}_3 \wedge \ddot{\boldsymbol{X}} + m_3 \boldsymbol{y}_3 \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_3 = \boldsymbol{y}_3 \wedge \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{y}_3 \wedge \boldsymbol{f}_{31} + \boldsymbol{y}_3 \wedge \boldsymbol{f}_{32} \end{cases}$$

各項の総和

第 1 項「$m_i\,\boldsymbol{y}_i\wedge\ddot{\boldsymbol{X}}$」の総和 $=\mathbb{O}$　**消えた！**

$$\because \sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{y}_i\wedge\ddot{\boldsymbol{X}} \overset{\wedge\ \text{の分配則}}{=} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{y}_i\right)}_{=\mathbb{O}\ \text{算法 8.1}}\wedge\ddot{\boldsymbol{X}} = \mathbb{O}\wedge\ddot{\boldsymbol{X}} = \mathbb{O}\ /\!/$$

第 2 項「$m_i\,\boldsymbol{y}_i\wedge\ddot{\boldsymbol{y}}_i$」の総和 $=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{y}_i\wedge\ddot{\boldsymbol{y}}_i$　**※そのまま残る**

第 3 項「$\boldsymbol{y}_i\wedge\boldsymbol{f}_i$」の総和 $=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{y}_i\wedge\boldsymbol{f}_i \equiv T \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ **全トルク**

第 4 項「$\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{y}_i\wedge\boldsymbol{f}_{ij}$」の総和 $=\mathbb{O}$　**消えた！**

$\because$「内力 $\boldsymbol{f}_{ij}$ の発生トルク」の総和 $=\mathbb{O}\ /\!/$　**※力学法則 8.1 p.78**

N 質点系の角運動方程式（総和の結果）

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i)}_{A} = T \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{y}_i \wedge \boldsymbol{f}_i \ \text{全トルク} \right) \qquad (8.8)\ \text{p.78}$$

(1) 一般の N 質点系（スケルトンの伸縮を認める）

$\Longrightarrow$ **A はこれ以上簡約できない.**

(2) 剛体（スケルトンの伸縮を固定）

$\Longrightarrow$ $\boxed{A = I\ddot{\theta} \text{ の形に簡約できる！}}$

剛体の回転運動（特殊な角運動）

8.1.4 節 p.78〜80 の結論

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i = T \qquad \text{(8.8) p.78}$$

質点系の伸縮を ⇩ 制限（剛体化）

$$I\,\ddot{\theta} = T, \qquad I \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i |\boldsymbol{y}_i|^2 \qquad \text{(7.1b) p.68} \ //$$

その根拠 ··· 剛体の回転運動の特性

- 各質点と重心の距離が不変：

$$|\boldsymbol{y}_i| = \text{定数} \qquad (8.9)$$

- 全質点の角速度が共通：

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \cdots \quad = \dot{\theta} \ \text{（共通）} \qquad (8.10)$$

$\sum m_i\, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i = I\ddot{\theta}$ の証明

- 質点の位置 $\bar{y}_i$ を θ 回転させせると，$\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{y}}_i$

- $\theta = \theta(t)$ として微分すると，

$$\dot{\boldsymbol{y}}_i = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{y}}_i = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{y}}_i = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}_i$$

- **算法 8.2:** $(\boldsymbol{y} \wedge \dot{\boldsymbol{y}})^{\cdot} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{y}} \wedge \dot{\boldsymbol{y}}}_{=0} + \boldsymbol{y} \wedge \ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}$

$$\Longrightarrow \quad m_i\, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i = m_i \left(\boldsymbol{y}_i \wedge \dot{\boldsymbol{y}}_i \right)^{\cdot} = m_i \left(\boldsymbol{y}_i \wedge \dot{\theta} \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right] \boldsymbol{y}_i \right)^{\cdot} = m_i \ddot{\theta} |\boldsymbol{y}_i|^2$$

$$\therefore \quad \sum m_i\, \boldsymbol{y}_i \wedge \ddot{\boldsymbol{y}}_i = \sum m_i \ddot{\theta} |\boldsymbol{y}_i|^2 = \left(\sum m_i |\boldsymbol{y}_i|^2 \right) \ddot{\theta} \quad = I\,\ddot{\theta} \;/\!/$$

慣性モーメント

算法 8.3 (p.80)

ある**基準点**まわりに，剛体を回転させるときの慣性モーメントは，

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i |\boldsymbol{x}_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad [\mathrm{kg{\cdot}m^2}] \tag{8.17}$$

となる．$|\boldsymbol{x}_i|$ は i 番目の質点と**基準点**の距離である．

平行軸の定理 (p.81)

剛体の重心 G まわりの慣性モーメントを I とする．G から d の距離にある新しい回転中心 O まわりの慣性モーメントは，

$$I' = I + M d^2 \quad (M \text{ は全質量}) \tag{8.19}$$

慣性モーメントの合成

力学法則 8.3 (p.83)

- 剛体を適当な部品に m 分割する.
- 各部品の慣性モーメントを I_i とする.

$\Longrightarrow$ 元の剛体の慣性モーメントは合計 $I = \sum_{i=1}^{m} I_i$ に等しい.

慣性モーメントの実用計算

- **表 8.1 p.82** のような既知の慣性モーメントを, **力学法則 8.3** で組み合せる.
- 欠損部があるときは, 欠損部を埋めた剛体から, 欠損部を引く.

演習タイム 3/3

- **例題 8.1 p83**
  - **誤植訂正：** 「$1\mathrm{kg}/\mathrm{m}$」$\Longrightarrow$「$1\mathrm{k}/\mathrm{mm}^2$」
- **問題 8.1 p83　※前回の追加例題を参照**

第 4 回 機械力学レポート

※ **機械力学サイト** `http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn`

- **第 8 週授業にて出題．**
- **レポート用紙：機械力学サイトからダウンロード・印刷．**
  - **1 枚以内**．裏面使用時は「裏につづく」と明記．

  ※ よく似たレポートは**不正行為の証拠**とする．(当期全単位 0)
- **提出期限：次回の前日．(次々回以降は受け取らない)**
  - 公欠などは早めの提出で対応せよ．
- **提出先：機械棟 3F・システム力学研究室 (2) の BOX．**