第 8 回 機械力学

剛体の運動 1

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

学習目標

- **運動法則の使い方**
  - 力とトルクの集約
  - ニュートン・オイラー方程式
  - 斜面を転がる球
- **運動法則の導出（作り方）**
  - 質点系と剛体
  - 重心運動の法則

学習方法

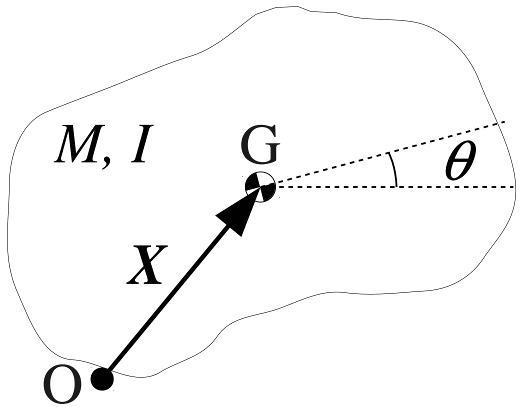
全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

運動法則の使い方

剛体の運動法則

Step 1: 重心 G で力とトルクを集約する．

Step 2: 重心の位置ベクトル，剛体の回転角 θ をとる．



Step 3: 運動方程式（平面運動）

力学法則 7.1 (p.68)

剛体の重心運動 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$ と，回転運動 $\theta = \theta(t)$ は，

$$\begin{cases} M\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} & \text{(重心運動)} \\ I\ddot{\theta} = T & \text{(回転運動)} \end{cases}$$

に従う．これを **ニュートン・オイラー方程式** という．

- 質量 M は，並進運動の慣性の強度．
- **慣性モーメント** I は，回転運動の慣性の強度．

$$\text{角加速度 } \ddot{\theta} = \frac{\text{作用するトルク } T}{\text{慣性モーメント } I}$$

※形式は並進と同じ

並進運動と回転運動の相似性

	質点の並進運動	剛体の重心運動	剛体の回転運動
変位	$\boldsymbol{x}$ [m]	$\boldsymbol{X}$ [m]	θ [rad]
速度	$\dot{\boldsymbol{x}}$ [m/s]	$\dot{\boldsymbol{X}}$ [m/s]	$\dot{\theta}$ [rad/s]
加速度	$\ddot{\boldsymbol{x}}$ [m/s^2]	$\ddot{\boldsymbol{X}}$ [m/s^2]	$\ddot{\theta}$ [rad/s^2]
慣性	m [kg]	M [kg]	I [kg·m^2]
外力	$\boldsymbol{f}$ [N]	$\boldsymbol{F}$ [N]	T [N·m]
運動方程式	$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}$	$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}$	$I\ddot{\theta} = T$

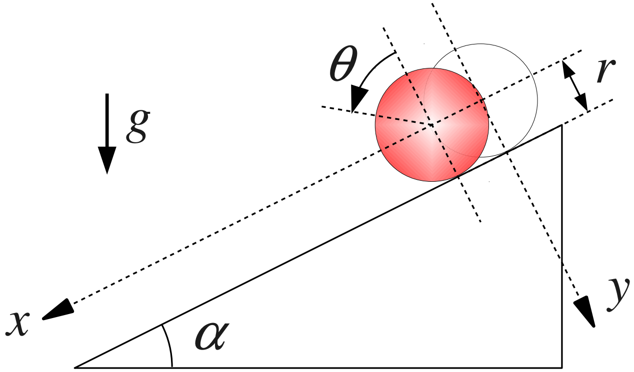
演習タイム 1/5

例題 7.1, p69

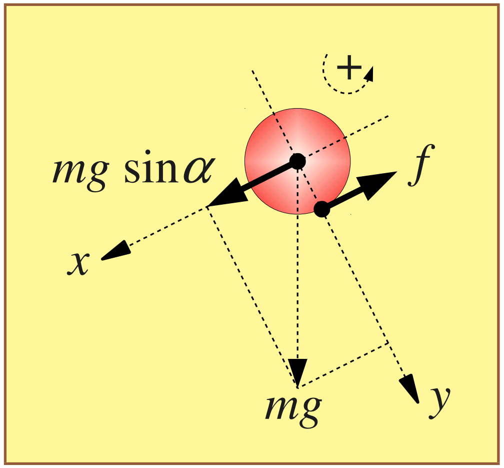
傾斜角 α の斜面を，滑らずに転がる質量 m，慣性モーメント I の球を考える．

(1) **球が受ける斜面方向の力を，球の重心で，力 F とトルク T に集約せよ．**

(2) **球の運動方程式を導け．**

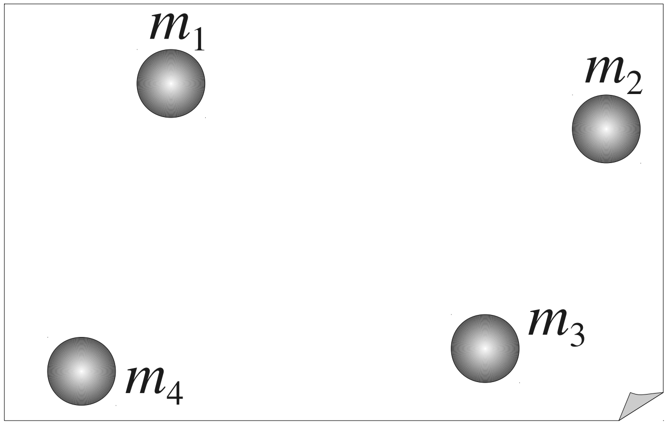


■ **ヒント：**



運動法則の導出（作り方）

スケルトンモデル（図 7.1, p.70）

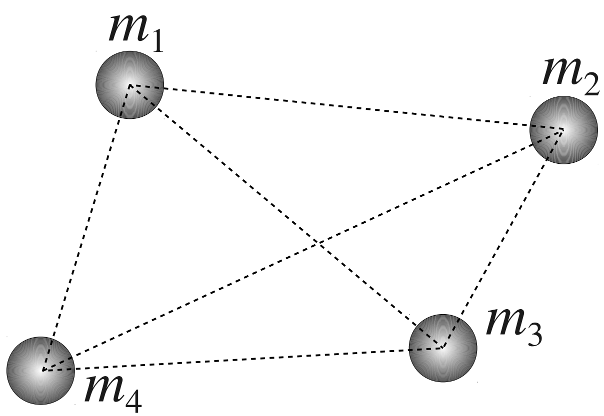


平板状の離散剛体（5 章）

骨組による

⟹

物体の表示

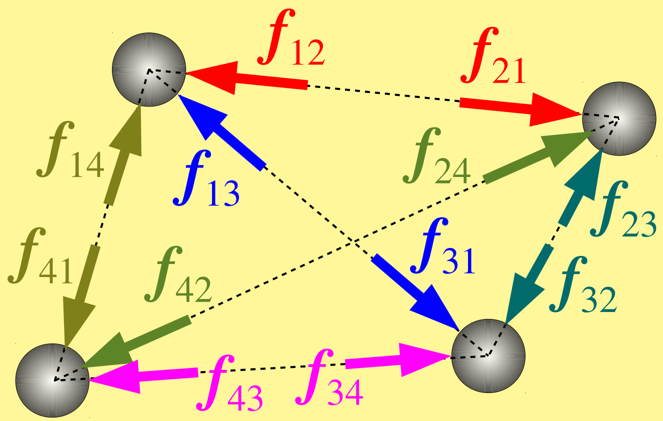


スケルトンモデル（本章）

- **質点をリンク（点線）で継いだもの**
  - リンクが伸縮しない $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 剛体
  - リンクの伸縮を許す $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 変形する物体（弾性体，ロボット，$\cdots$）

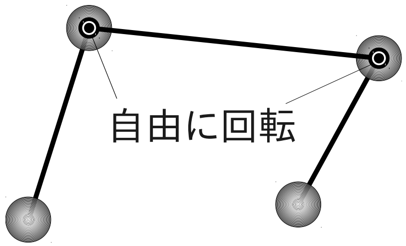
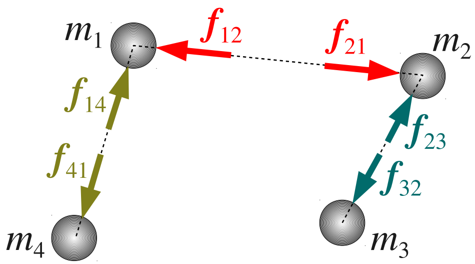
質点系

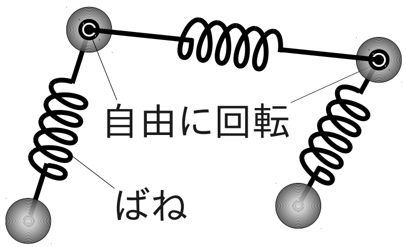
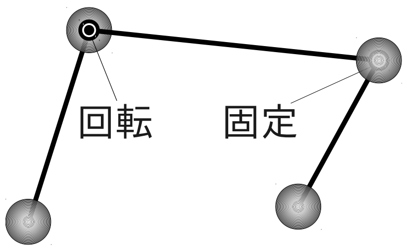
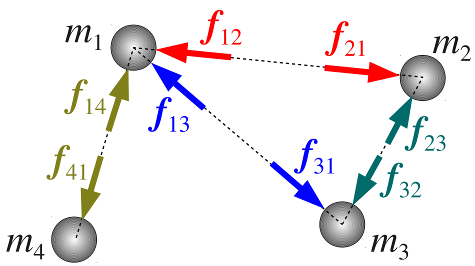
定義 ⟺ **内力を考慮したスケルトンモデル**



- **内力** ·········· 物体内部の **作用・反作用** $\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji}$ による力
- N **質点系** ··· N 個の質点からなる質点系　※上図は 4 質点系
- **剛体** ·········· リンクが伸縮しない質点系

質点系の例（表 7.2, p.71）

<table>
<tr><th></th><th>具体的な構造</th><th>質点系による表示 (スケルトン表示)</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td>
</td><td rowspan="2">

同上</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

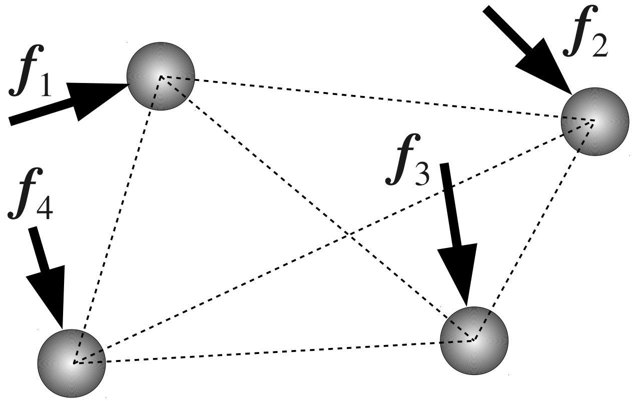
演習タイム 2/5

■ 問題 7.1, p.71

4 質点系の具体例を，何でもいいから描け．

質点系の外力

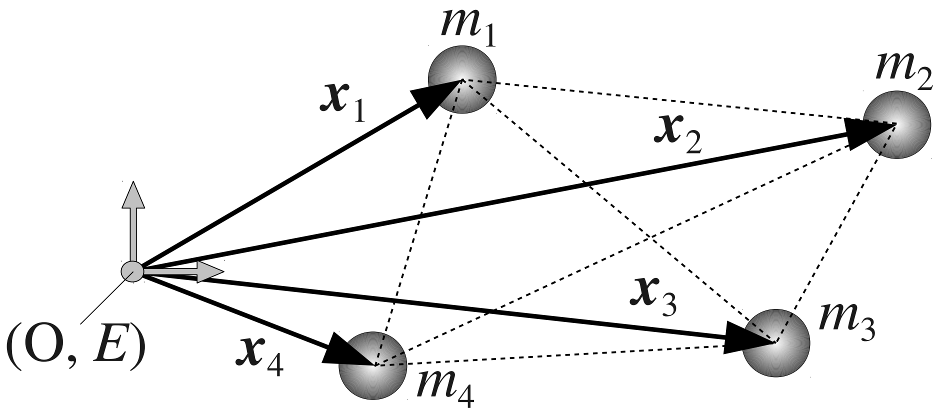
定義 $\Longleftrightarrow$ 質点系に作用する内力以外の力



重心運動の導出

各質点の運動方程式

慣性系 $(O, \mathcal{E})$ を設定し，位置ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ をとる



質点 i の運動方程式（第 2 法則）

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \underbrace{\boxed{\boldsymbol{f}_i}}_{\text{外力}} + \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{ij}}}_{\text{内力}} \quad (i = 1, \cdots, N) \qquad \text{(7.6) p.72}$$

N 質点系の運動方程式

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{f}_1 + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{1j}$$

$$m_2 \ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{f}_2 + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{2j}$$

$$m_3 \ddot{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{f}_3 + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{3j}$$

$$m_4 \ddot{\boldsymbol{x}}_4 = \boldsymbol{f}_4 + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{4j}$$

$$\vdots$$

大量だと理解できない！

⇨ 全部足して，1 本にして考える

演習タイム 3/5

追加の例題

- 次の 2 質点系を (辺々) 総和せよ.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \\ m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- 次の 3 質点系を (辺々) 総和せよ.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \\ m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ m_3\ddot{\boldsymbol{x}}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

演習タイム 4/5

追加の例題

- 次の 2 質点系を (辺々) 総和せよ.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = F_{12} + F_1 \\ m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = F_{21} + F_2 \end{cases}$$

- 次の 3 質点系を (辺々) 総和せよ.

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = F_{12} + F_{13} + F_1 \\ m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2 = F_{21} + F_{23} + F_2 \\ m_3\ddot{\boldsymbol{x}}_3 = F_{31} + F_{32} + F_3 \end{cases}$$

ヒント: 作用・反作用の法則 $F_{ij} = -F_{ji}$

N 質点系の総和 1/2

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i}_{A} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i}_{B} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{ij}}_{C}$$

- **全内力** $C = \mathbb{O}$ //

∵ **例えば** $N = 3$ **のとき，**

$$C = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_{ij} = \sum \begin{matrix} \boldsymbol{f}_{11} & \boldsymbol{f}_{12} & \boldsymbol{f}_{13} \\ \boldsymbol{f}_{21} & \boldsymbol{f}_{22} & \boldsymbol{f}_{23} \\ \boldsymbol{f}_{31} & \boldsymbol{f}_{32} & \boldsymbol{f}_{33} \end{matrix} = \sum \begin{matrix} \boldsymbol{f}_{11} & \boldsymbol{f}_{12} & \boldsymbol{f}_{13} \\ -\boldsymbol{f}_{12} & \boldsymbol{f}_{22} & \boldsymbol{f}_{23} \\ -\boldsymbol{f}_{13} & -\boldsymbol{f}_{23} & \boldsymbol{f}_{33} \end{matrix} = \mathbb{O}$$ //

∵ **作用・反作用** $\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji}$ と**自分への力** $\boldsymbol{f}_{ii} = \mathbb{O}$

N 質点系の総和 2/2

■ **全外力** $F := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i \quad (= B)$ // **これ以上は簡略化できない**

重心の復習 p.45

重心 $\boldsymbol{X} \overset{定義}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{X} = \dfrac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{x}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i}{\text{全質量 } M}$

■ $\therefore \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i = M\boldsymbol{X} \Longrightarrow$ **左辺** $A = \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = M\ddot{\boldsymbol{X}}$ //

$\therefore$ N 質点系を総和すると「$M\ddot{\boldsymbol{X}} = F$」 $\Longrightarrow$ **(7.1a) p.68**

(M は全質量，X は重心，F は全外力) **重心運動**

まとめ — 質点系の重心運動

力学法則 7.3 (p.74)

　N 質点系の全質量を M，全外力を $\boldsymbol{F}$ とするとき，質点系の重心の運動 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$ は，次の運動方程式にしたがう．

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F} \tag{7.1a}$$

質点系の一形態である「剛体」の重心運動 $\boldsymbol{X}(t)$ も，この法則に従う．

- **質点系の重心運動は，**
  - 内力の影響を受けない．$\because$ 内力は 1 つ残らず総和で消した
  - 質点（質量 M，外力 $\boldsymbol{F}$）と動き方が同じ．$\because$ 運動方程式が同じ

演習タイム 5/5

問題 7.2, p.74