第 7 回 機械力学

質点の運動

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

学習目標

- ベクトルの微分
- 空間座標とニュートン力学
- 質点の直線運動
- 質点の平面運動

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

数ベクトル・行列の時間微分

定義 $\Longleftrightarrow$ **全成分を微分する**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [x_i]^{\cdot} := [\dot{x}_i] \qquad \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d[x_i]}{dt} := \left[\frac{dx_i}{dt} \right] \right) \tag{6.1}$$

$$\dot{A} = [a_{ij}]^{\cdot} := [\dot{a}_{ij}] \qquad \left(\frac{dA}{dt} = \frac{d[a_{ij}]}{dt} := \left[\frac{da_{ij}}{dt} \right] \right) \tag{6.2}$$

例題 6.1, p.56

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \end{bmatrix}$ を時間 t で微分せよ.

演習タイム 1/3

ライプニッツ則 $\cdots$ $(XY)' = X'Y + XY'$

追加の例題　次の行列とベクトルの積を時間微分せよ

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \end{bmatrix}$$

空間座標

点 X の空間座標

$\vec{x}$ ⋯ 幾何ベクトル (図形)　　$\boldsymbol{x}$ ⋯ 成分

(1) 基準点 O を決めて，幾何ベクトル $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OX}}$ をとる．

$\Longrightarrow$ $\vec{x}$ を「O から測った X の **位置ベクトル**」という．

(2) 基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ を決めて，$\vec{x}$ の成分 $\boldsymbol{x} = [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$ をとる．

(3) この成分 $\boldsymbol{x}$ を，$(\mathrm{O}, \mathcal{E})$ で測った X の **空間座標** という．

演習タイム 2/3

問題 6.1 (p.58)

図示せよ．

座標系

- **ペア** $(O, \mathcal{E})$ **を指定しないと，**

  空間座標 $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ **がどこを差すか，食い違う！**

$\Downarrow$ 命名

座標系

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 基準点と基底のペア $(\mathrm{O}, \mathcal{E})$ のこと．(測量機材)

- 基準点 O を変えると，位置ベクトル $\vec{x}$ が変わる．
- 基底 $\mathcal{E}$ を変えると，$\vec{x}$ の成分 $\boldsymbol{x} = [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$ が変わる．

時間変化しない座標系を **静止座標系** という

静止座標系の成分

静止座標系 $(O, \mathcal{E})$ では ⋯

	幾何ベクトル		成分
運動	$\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\text{1対1}}{\Longleftrightarrow}$	$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$
速度	$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\text{1対1}}{\Longleftrightarrow}$	$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$
加速度	$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\text{1対1}}{\Longleftrightarrow}$	$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}$

証明：$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{x}_1(t)\boldsymbol{i} + \dot{x}_2(t)\boldsymbol{j} + \dot{x}_3(t)\boldsymbol{k} \quad \therefore \quad \left[\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}}(t)\right]_{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$

動座標系の成分

動く座標系 $(O, \mathcal{E}(t))$ では ⋯

	幾何ベクトル		成分
運動	$\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\textbf{1対1}}{\Longleftrightarrow}$	$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$
速度	$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\textbf{1対1}}{\not\Longleftrightarrow}$	$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$
加速度	$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\boldsymbol{x}}(t)$	$\overset{\textbf{1対1}}{\not\Longleftrightarrow}$	$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}$

証明：$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d}{dt}\Big(x_1(t)\boldsymbol{i}(t) + x_2(t)\boldsymbol{j}(t) + x_3(t)\boldsymbol{k}(t)\Big)$

$$= \dot{x}_1(t)\boldsymbol{i}(t) + \dot{x}_2(t)\boldsymbol{j}(t) + \dot{x}_3(t)\boldsymbol{k}(t)$$

$$+ \underline{x_1(t)\dot{\boldsymbol{i}}(t) + x_2(t)\dot{\boldsymbol{j}}(t) + x_3(t)\dot{\boldsymbol{k}}(t)} \quad \because \text{基底の時間微分}$$

ニュートンの法則 （= 測定値の法則！）

以下，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{f}$ $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ **静止座標系で測った成分 (測定値)** $\neq$ 幾何ベクトル

力学法則 6.1 (p.60)

第 1 法則: 力を受けない質点は，その速度を保つ．(静止なら静止)

第 2 法則: 力 $\boldsymbol{f}$ を受けた質量 m の質点の運動 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ は，

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f} \tag{6.7}$$

に従う.（**運動方程式**）

第 3 法則: 質点 X_i が質点 X_j から受ける力を $\boldsymbol{f}_{ij}$ とするとき，

$$\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji} \tag{6.8}$$

が成立する.（**作用・反作用の法則**）

ニュートンの法則は，ほとんど成立しない！

慣性系 (慣性座標系)

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ニュートンの法則が成立する「**成分**」を与える**特殊な座標系**

慣性系の例

- 静止座標系
- 等速で平行移動する座標系

慣性系でない例

- 回転する座標系
- 曲線運動する座標系

∴ ロボットアームに固定したカメラに映る世界では，ニュートンの法則は成立しない．測定値が，ぐりぐり動く座標系の成分だから．

演習タイム 3/3

- **6.3 節と 6.4 節を自習せよ！**
- **例題 6.2, p.61**
- **例題 6.3, p.64**
- **例題 6.4, p.65**

質点の直線運動

運動方程式

$$m\ddot{x} = f \quad (m, f \text{ は定数とする}) \tag{6.9}$$

- 微分方程式 $m\ddot{x} = f$ を解かずに分かる性質

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} \quad (m, f \text{ は定数}) \tag{6.10}$$

初期値問題と境界値問題

準備

$$m\ddot{x} = \frac{f}{m} \quad \text{(運動方程式)}$$

両辺⇩積分

$$\dot{x}(t) = \frac{f}{m}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

両辺⇩積分

$$x(t) = \frac{f}{2m}t^2 + Ct + D \quad (D \text{ も積分定数})$$

- **未知数 C, D の決め方 (p.63 の表)**
  - 初期時刻で条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ を課す．(**初期値問題**)
  - 終端時刻 t_1 でも条件 $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_1) = v_1$ を課す．(**境界値問題**)

質点の平面運動

運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}: \quad \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (m \text{ は定数，} \boldsymbol{f} \text{ は定ベクトル}) \tag{6.16}$$

必要な公式

- 数ベクトルの積分 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 全成分を同じく積分：

$$\int \boldsymbol{x}(\tau)d\tau = \int [x_i(\tau)]d\tau := \left[\int x_i(\tau)d\tau\right] \tag{6.17}$$

- ベクトル版「微積分学の基本定理」

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 微分を積分すると元に戻る．ただし積分定数がつく．

$$\int \dot{\boldsymbol{x}}\, dt = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数ベクトル}) \tag{6.18}$$