第 5 回 機械力学

剛体の重心 1

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

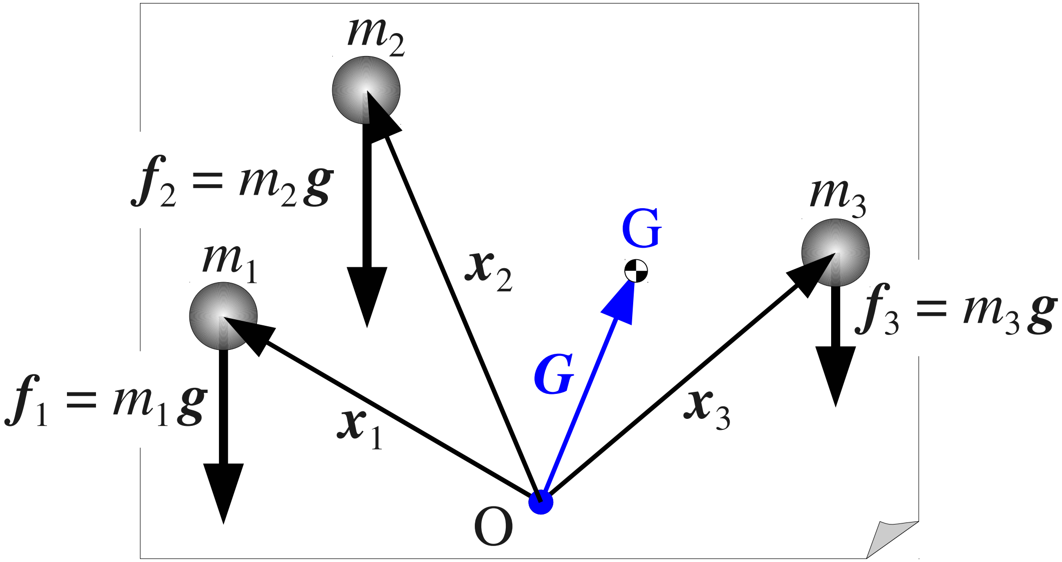
学習目標

- 離散剛体の重心
- 連続剛体の重心 (1 次元)

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

質量 0 の平板に取り付けた 3 質点



- **G を壁面にピン止めする．**
- **G の位置を調整して，釣り合わせる．**
- **このときの G の位置を「重心」という．**

G における平板の釣合い

力の釣合い方程式

- 支点 G からの反力 $\boldsymbol{f}$ に対して，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3 = \mathbb{O}$ //

トルクの釣合い方程式

- $T = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{G}) \wedge \boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{G}) \wedge \boldsymbol{f}_2 + (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{G}) \wedge \boldsymbol{f}_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{G}) \wedge (m_1\boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{G}) \wedge (m_2\boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{G}) \wedge (m_3\boldsymbol{g}) \\
&= \Big(m_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{G})\Big) \wedge \boldsymbol{g} + \Big(m_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{G})\Big) \wedge \boldsymbol{g} + \Big(m_3(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{G})\Big) \wedge \boldsymbol{g} \\
&= \Big(m_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{G}) + m_2(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{G}) + m_3(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{G})\Big) \wedge \boldsymbol{g} \\
&= \Big(\underbrace{(m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + m_3\boldsymbol{x}_3) - (m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{G}}_{\heartsuit}\Big) \wedge \boldsymbol{g} = 0 \quad //
\end{aligned}
$$

$\therefore$ **トルクの釣合い条件は，$\heartsuit = \mathbb{O}$**

離散剛体の重心

トルクの釣合い条件:

$$\heartsuit = (m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + m_3\boldsymbol{x}_3) - (m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{G} = \mathbb{O}$$

$$\therefore \boldsymbol{G} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + m_3\boldsymbol{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} /\!/$$

(n 質点も同様)

算法 5.1 (p.45)

n 質点からなる剛体の重心 $\boldsymbol{G}$ は,

$$\boldsymbol{G} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{x}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{x}_i}{M} \qquad (5.2)$$

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ を**全質量** (total mass) という.

演習タイム 1/3

追加の例題

p.43 の離散剛体の重心を，次の条件で計算せよ.

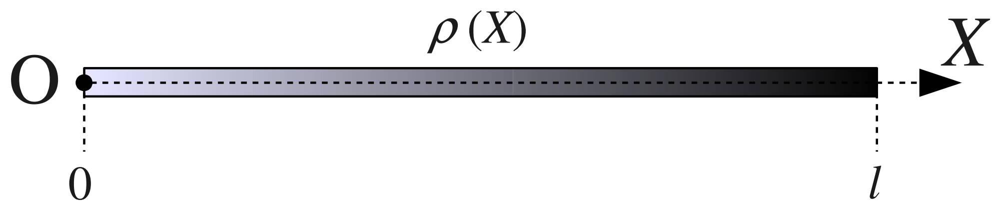
$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

離散剛体と連続剛体

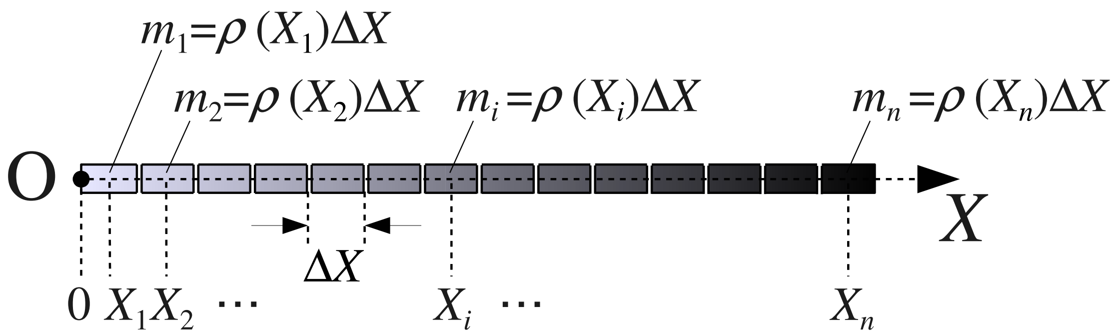
- 例題のような質量が偏在した剛体を，**離散剛体**という.
- 質量が連続的に分布した剛体を，**連続剛体**という.

1 次元・連続剛体の重心 1/5

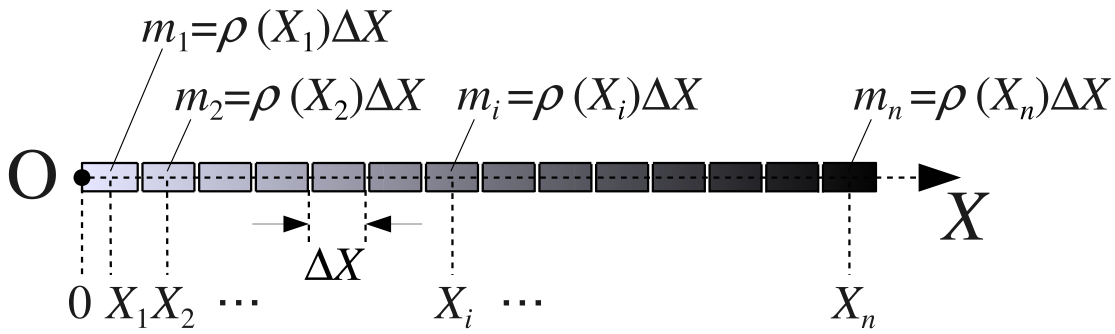
- **場所 X に応じた密度 $\rho(X)$ [kg/m] を持つ剛体．**
  - $\rho(X)$ を **線密度** という．



- **重心を求めるため，n 分割する．** $\Longrightarrow$ **幅 ΔX の小片**



1 次元・連続剛体の重心 2/5



- **仮定「小片内の密度は一定」**
  - 小片の位置 X_i に対して，小片の質量 $m_i = \rho(X_i)\Delta X$
- **算法 5.1, p.45 に代入．近似的な全質量を得る．**

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)\Delta X$$

1 次元・連続剛体の重心 3/5

積分への書き換え

- 総和記号 $\sum_{i=1}^{n}$ を積分記号 $\int_0^l$ に書き直す.
- とびとびの変数 X_i を，連続的な変数 X に書き直す.
- 細分幅 ΔX を無限小 dX に書き直す.

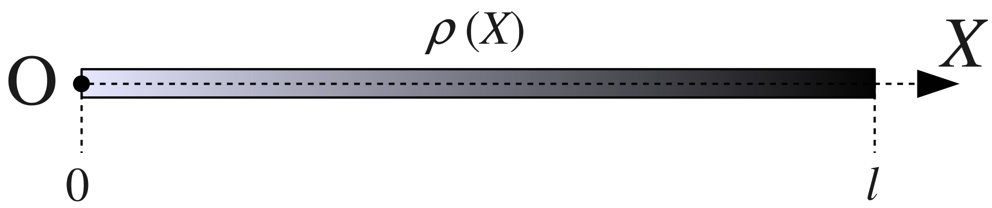
全質量

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)\Delta X \xrightarrow{n\to\infty} M = \int_0^l \rho(X)dX \qquad (5.3)$$

演習タイム 2/3

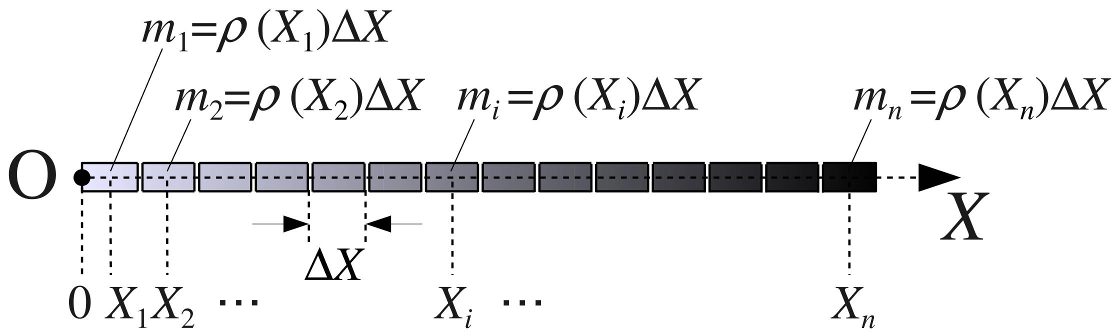
$$M = \int_0^l \rho(X) dX \qquad (5.3)$$

例題 5.1 の分問



線密度 $\rho(X) = a\,X$ に対する全質量 M を求めよ.

1 次元・連続剛体の重心 4/5



- **仮定「小片内の密度は一定」**
  - 小片の位置 X_i に対して，小片の質量 $m_i = \rho(X_i)\Delta X$
- **算法 5.1, p.45 に代入．近似的な重心を得る．**

$$G_n = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i X_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} X_i \rho(X_i)\Delta X$$

1 次元・連続剛体の重心 5/5

積分への書き換え

- 総和記号 $\sum_{i=1}^{n}$ を積分記号 $\int_0^l$ に書き直す.
- とびとびの変数 X_i を，連続的な変数 X に書き直す.
- 細分幅 ΔX を無限小 dX に書き直す.

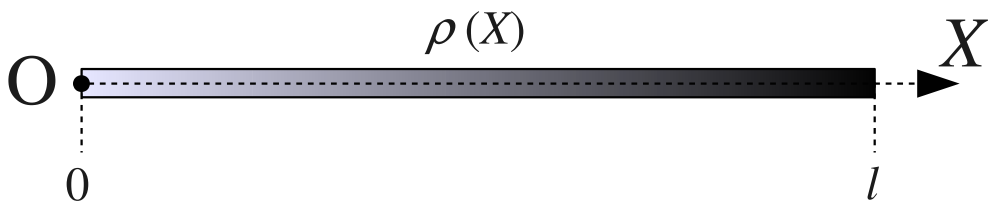
重心

$$G_n = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} X_i\,\rho(X_i)\Delta X \xrightarrow{n\to\infty} G = \frac{1}{M}\int_0^l X\rho(X)dX \tag{5.6}$$

演習タイム 3/3

$$G = \frac{1}{M}\int_0^l X\rho(X)dX \quad (5.6)$$

例題 5.1 の分問



線密度 $\rho(X) = a\,X$ に対する重心 G を求めよ.