# 第 0 回 機械力学

## ガイダンス

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

# 講義の内容

- **機械工学に必要な初等力学**
  - 工業力学 (剛体の運動)
  - 機械力学 (機械振動学)
  - 関連科目：材料力学，自動制御工学，ロボット力学
- **運動方程式の立て方**
  - ラグランジュ形式の解析力学
- **ロボット制御への応用**
  - 力学シミュレーション
  - フィードバック制御

# 受講上の注意

- **テキスト … 生協販売の「機械力学」を購入**
- **日程と場所 … http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn に掲載**

$\Longrightarrow$


- **成績評価**
  - 必修科目 … 落すな！
  - 出席点 ＋ 課題レポート × 7　(試験は実施しない)
- **メディア基盤センターでの自習**
  - 第 11 週までに，テキスト 15 章を自習せよ．単独で進めず，実習の班で助け合うこと．この自習を前提にレポート課題を課す．
  - プログラム例は `http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/code` にある．

## 第 1 回 機械力学

# ベクトル化

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

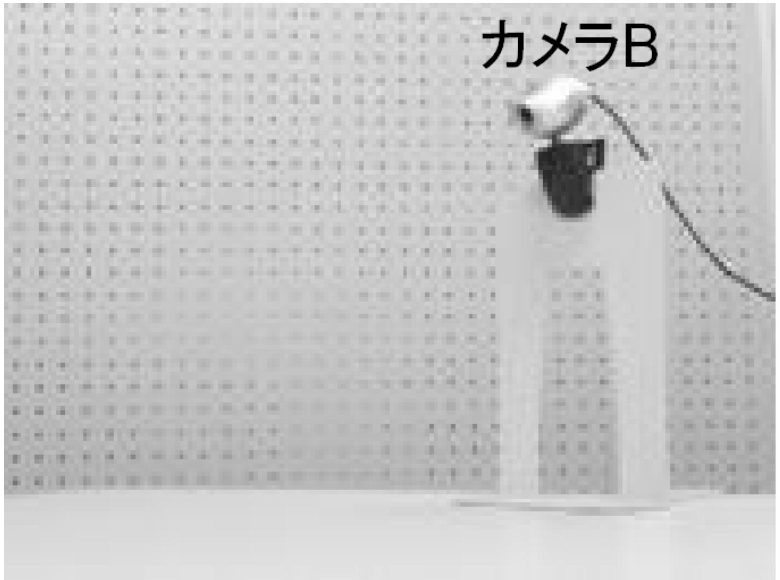
# 学習目標

- 位置ベクトルと力ベクトル (復習)
- ベクトルの算法
- 具体的対象のベクトル化
- ベクトルの成分表示
- 位置ベクトルの例題

# 位置ベクトル (1/3)

- カメラ B に対象物が映り，それをカメラ A が映している．
- この 2 枚の映像から，A に対する対象物の位置を割り出せ．

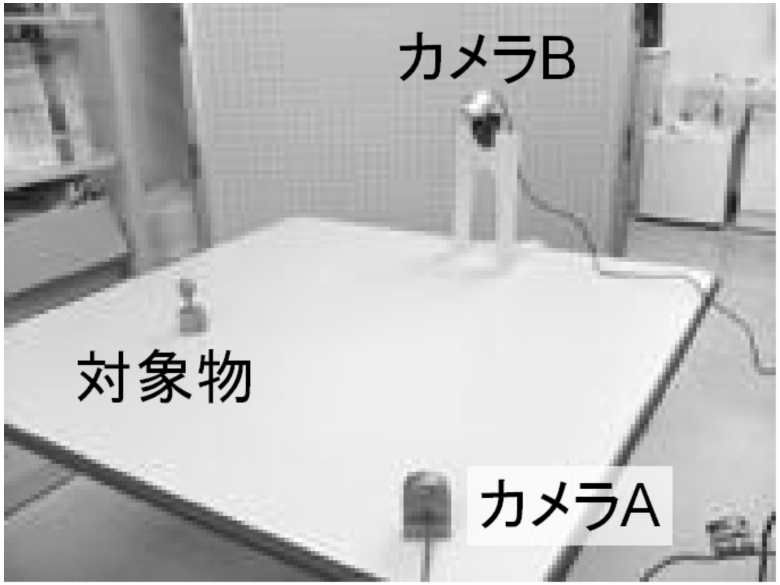

**カメラ B に写った映像**




**カメラ A に写った映像**

# 位置ベクトル (2/3)

- もちろん，超越的なカメラが使えれば，全体像，

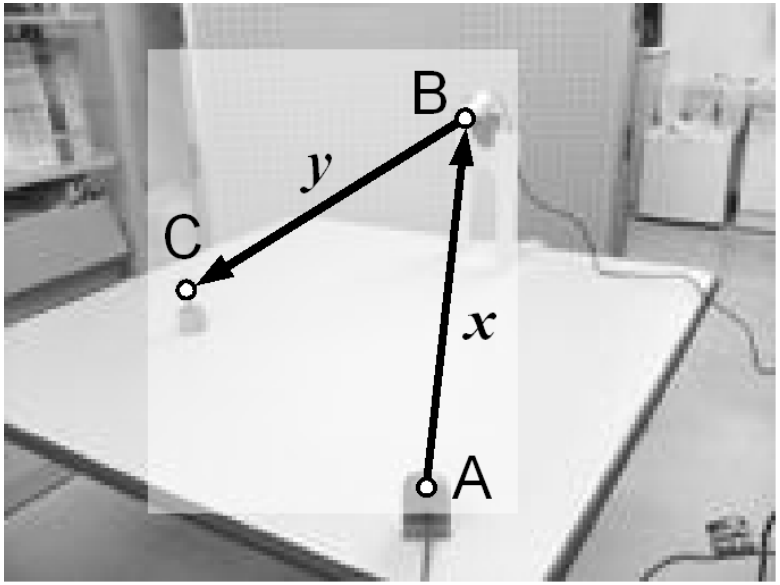



が判明するが，ここでは使えないとする．

# 位置ベクトル (3/3)

## 「虚構」の導入（その 1）

- 空間の 2 点を結ぶ「矢印」を導入．これらを太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で表す．

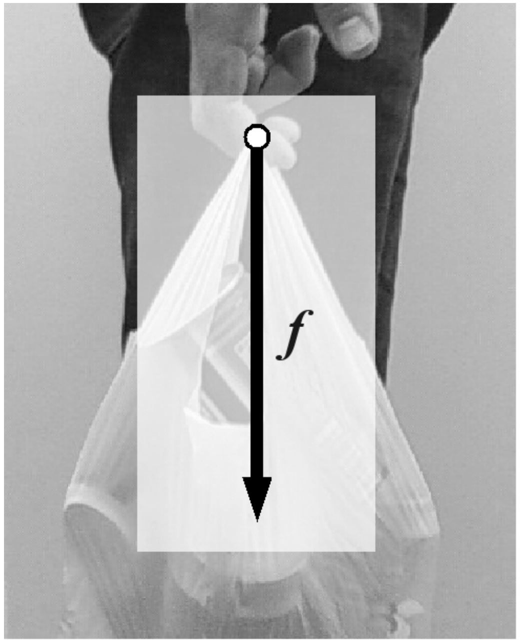



- このような，2 点の配置を表わす架空の矢印 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を「**位置ベクトル**」という．

# 力ベクトル

## ■ 「虚構」の導入（その 2）

- 力を表わす「矢印」を導入．これらを太字 $\boldsymbol{f}$ で表す.




- このような，力を表わす架空の矢印 $\boldsymbol{f}$ を「**力ベクトル**」という.

# 筆算用のベクトル

- 「虚構」を計算したい．
- 位置と力は，紙の上で同じように筆算できる．
- その共通の筆算ルールを「ベクトル」という．

# ベクトルの筆算ルール（ベクトルの公理）

■ 次の公式で計算する「**太字** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$」を**ベクトル**という.

(L1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

(L2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.

(L3) どんな $\boldsymbol{x}$ に足しても

$$\boldsymbol{x} + \mathbb{O} = \mathbb{O} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

となる**零ベクトル** $\mathbb{O}$ が使える.

(L4) どんな $\boldsymbol{x}$ にも，相方 $(-\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbb{O}$$

が存在する (**逆ベクトル**)

(L5) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$.

(L6) スカラ 1 の作用は，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(L7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$.

(L8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

**太字**のまま筆算するための
式変形ルール

この公式で計算する限り,
成分のチェックは無用！

# 具体的対象のベクトル化（虚構と現実のつなぎ方）

- **考察対象に，具体的な 5 つの操作を定める．**

**5 つの操作**

**(a) 等号 $x = y$ の判定基準**

**(b) 加法 $x + y$ のやり方**

**(c) スカラ倍 $\lambda x$ のやり方**

**(d) 零ベクトル $\mathbb{O}$ の作り方**

**(e) 逆ベクトル $(-x)$ の作り方**

- 考察対象に対する以上の操作が，公式 (L1)〜(L8) を満せば，その対象は「ベクトル」として筆算可能.
- 満さないなら，操作の定義を改良する．どうやってもダメなら「ベクトル」としての筆算はあきらめる.

# 幾何ベクトル

## 「矢印」は図形．そのままではベクトルではない．

- 「矢印」を (L1)〜(L8) で筆算可能にする 5 つの操作とは？

表 1.1, p.4

| 操作項目 | 表記 | 対応する図形的な操作 |
|---|---|---|
| (a) 等号 | $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ | 矢印 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行移動でぴったり重なること．長さ 0 の矢印は全て等しいとみなす． |
| (b) 加法 | $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ | $\boldsymbol{x}$ の終点を $\boldsymbol{y}$ の始点としたとき，$\boldsymbol{x}$ の始点から $\boldsymbol{y}$ の終点に引いた第 3 の矢印．(それを $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と書く) |
| (c) スカラ倍 | $\lambda\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ の長さを $\lambda$ 倍した矢印．(それを $\lambda\boldsymbol{x}$ と書く) |
| (d) 零ベクトル | $\mathbb{O}$ | 長さが 0 の矢印．(それを $\mathbb{O}$ と書く) |
| (e) 逆ベクトル | $-\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ の向きを反転した矢印．(それを $-\boldsymbol{x}$ と書く) |

- (L1)〜(L8) を満すことは，高校で体験済み．
- 表 1.1 の操作が付与された「矢印」を「幾何ベクトル」という．

# 演習タイム

- **問題 1.1, p5**

# 数ベクトル

- **数の並び $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ を，$[x_i]$ と短縮表記する．**
- **数の並び $\boldsymbol{x} = [x_i]$ は，そのままではベクトルではない．**
  - 数の並びを (L1)〜(L8) で筆算可能にする 5 つの操作とは？

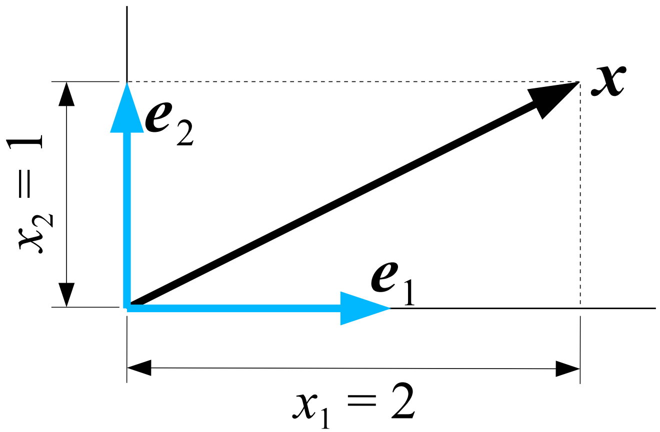
表 1.2, p.5

| 操作項目 | 表記 | 対応する数学的な実体 |
|---|---|---|
| (a) 等号 | $[x_i] = [y_i]$ | 各成分 $x_i, y_i$ が互いに等しいこと. |
| (b) 加法 | $[x_i] + [y_i]$ | 「各成分の和 $x_i + y_i$」を成分とする数の並び. |
| (c) スカラ倍 | $\lambda[x_i]$ | 「各成分の $\lambda$ 倍 $\lambda x_i$] を成分とする数の並び. |
| (d) 零ベクトル | $\mathbb{O}$ | 成分が全て 0. |
| (e) 逆ベクトル | $-[x_i]$ | 「各成分の $-1$ 倍 $-x_i$」を成分とする数の並び. |

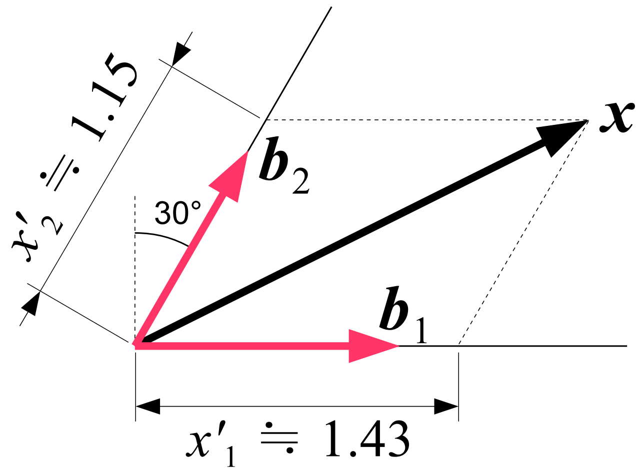
  - (L1)〜(L8) を満すことは，高校で体験済み.
  - 表 1.2 の操作が付与された「数の並び」を「数ベクトル」という.

# 幾何ベクトルの成分表示

- 「矢印」は図形．太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ で筆算 $\therefore$ **数値に非ず！**
- 平行四辺形の「寸法」で数値化．寸法の並びが「成分」．



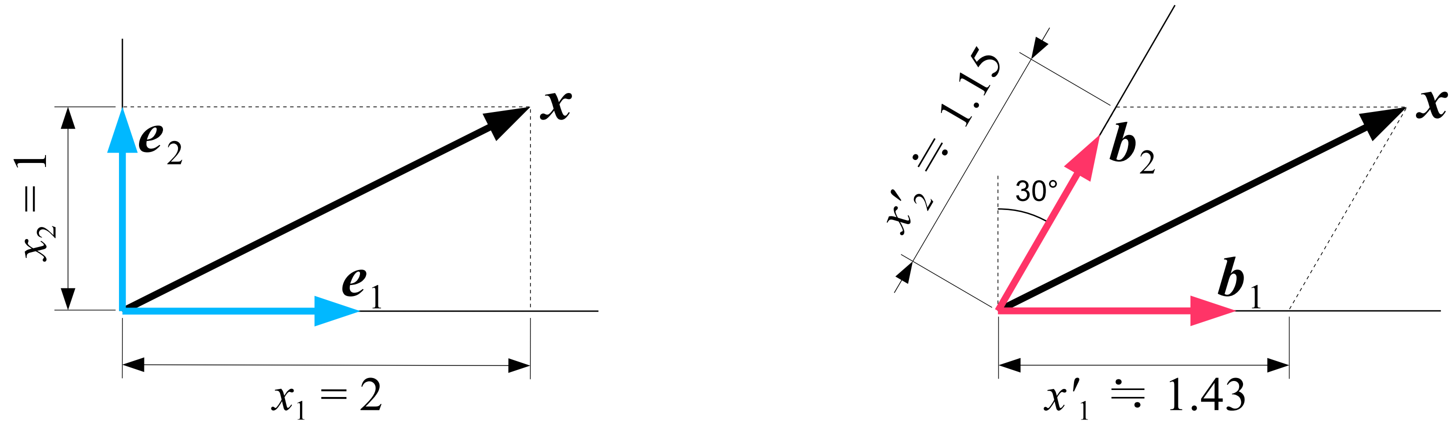

$\boldsymbol{x}$ の直交成分




同じ $\boldsymbol{x}$ の斜交成分

- 寸法の取り方で，成分は変化する！

# 筆算による成分表示




- 直交成分…直方体を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で表す（直交基底）

$$\text{ベクトル } \boldsymbol{x} \overset{\text{展開}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \quad \underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \text{成分} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{x}}$$

- 斜交成分…平行四辺形を単位ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ で表す（斜交基底）

$$\text{ベクトル } \boldsymbol{x} \overset{\text{展開}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{b}_1 + x'_2\boldsymbol{b}_2 \quad \underset{\text{係数}}{\overset{\text{展開}}{\Longrightarrow}} \quad \text{成分} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{x}}'$$

# ベクトルの成分表示（一般論）

**算法 1.2, p.6**

成分測定用のベクトルの組 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を，**基底**という．ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底 $\mathcal{E}$ で展開する．

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \quad \xrightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\boldsymbol{x}} \tag{1.3}$$

この展開係数 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ を，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の**成分**という．

☆ 以降，$\mathcal{E}$ で測った $\boldsymbol{x}$ の成分を，$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\mathcal{E}}$ または $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}}$ と書く

# 演習タイム

- **例題 1.1, p6**

# ベクトルと成分の 1 対 1 対応（図 1.3, p.7）

## 基底 $\mathcal{E}$ を 1 つ選んで固定すると，

| ベクトル $\boldsymbol{x}$ の世界 | | 成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ の世界 |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ | 1 対 1 | $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}, \cdots$ |
| $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \ \ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \ \ \lambda \boldsymbol{x}$ | $\Longleftrightarrow$ | $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{y}}, \ \ \widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{y}}, \ \ \lambda \widetilde{\boldsymbol{x}}$ |
| $\mathbb{O}, \ \ -\boldsymbol{x}$ | 基底 $\mathcal{E}$ | $\mathbb{O}, \ \ -\widetilde{\boldsymbol{x}}$ |
| 計算ルール (L1)〜(L8) | | 計算ルール (L1)〜(L8) |

## 成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = [x_i]$ から，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の復元

- 成分を測った基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を使って，

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n \quad ※\ \mathrm{n}\ 次元 \tag{1.4}$$

- 成分を測る基底と，ベクトルを復元する基底を同じにしないと，同じベクトルは復元できない．

# 演習タイム（位置ベクトルの例題）

- 例題 1.2, p7
- 例題 1.3, p7
- 問題 1.2, p8
- 問題 1.3, p8

# 束縛ベクトル

- 位置ベクトル $x$ …始点 O を変えると差す場所が変わる．
- 力ベクトル $f$ …作用点 P を変えると作用が変わる．

⇨ 始点とペア $(\mathrm{O}, x)$，$(\mathrm{P}, f)$ で指定しないと，性質が確定しない．

このようなベクトルを「束縛ベクトル」という．

$\therefore$ 束縛ベクトルをベクトル $x, f$ だけで書くのは不正確．

しかし，慣例上，始点の表記は省略されることが多い．