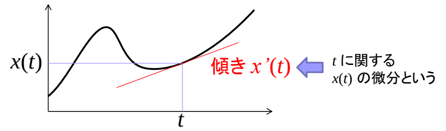
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

⑤連続時間モデル

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》微分法

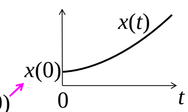


- 微分法の例（高校数学）
  1. $x(t) = t^n \Rightarrow x'(t) = nt^{n-1}$　※整関数
  2. $x(t) = e^{at} \Rightarrow x'(t) = ae^{at}$　※指数関数　e^{at} =exp(at)とも書く
  3. $x(t) = \sin(bt) \Rightarrow x'(t) = b\cos(bt)$　※三角関数
  4. $x(t) = \cos(bt) \Rightarrow x'(t) = -b\sin(bt)$　※三角関数

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル（1次系）

- 離散時間モデル（差分方程式）
  - □$x_{n+1} = a\,x_n \Rightarrow$ 解　$x_n = a^n x_0$　初項
- 連続時間モデル（微分方程式）
  - □$x'(t) = a\,x(t) \Rightarrow$ 解　$x(t) = e^{at}x(0)$　初期値



証明）解を t で微分すると，
$x'(t) = (e^{at})'x(0) = (a\,e^{at})x(0)$　※微分法の例 2
$= a\,(e^{at}x(0)) = a\,x(t)$ //

微分方程式 ＝ 変数とその微分からなる方程式のこと

課題1：　text5.xls の「指数関数」シートを開き，係数a を変更しながら，解 $x(t) = e^{at}x(0)$ のグラフの変化を観察せよ．

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル（1次系）の安定性

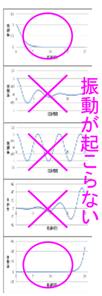
- 連続時間モデル（微分方程式）

$\boxed{x'(t) = a\,x(t)} \Rightarrow$ 解　$x(t) = e^{at}x(0)$

- 安定性

係数 a の条件	解 x(t) の動き	安定性の名称
a < 0	0に収束	漸近安定
a = 0	一定値	中立安定
0 < a	∞に発散	不安定

5種類のダイナミクスの2種類しか出てこない！



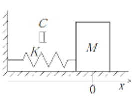
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

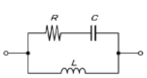
振動が起こる連続時間モデル

- 最低でも，2次系！

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

- 2次系の例
  - □機械振動系（xは変位）
    $m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = 0$
  - □共振回路（qは電荷）
    $L\,q''(t) + R\,q'(t) + q(t)/C = 0$





UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル（2次系）

- 1次系
  係数がそのまま入る
  $\boxed{x'(t) = a\,x(t)} \Rightarrow$ 解 $x(t)$ = 定数 × $\exp(a\,t)$
- 2次系
  $\boxed{x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0}$
  違う係数が入る
  $\Rightarrow$ 解 $x(t)$ = 定数 × $\exp(s_1\,t)$ + 定数 × $\exp(s_2\,t)$
- 新たな係数 s_1, s_2 を「固有値」という．

固有値の求め方

- 連続時間モデル（2次系）

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

同じ係数の2次方程式

- 固有方程式

$$s^2 + a\,s + b = 0$$

解く

解の公式

- 固有値

$$s_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad s_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

《復習》2次方程式と複素数

数学は紙に文字で書く空想

存在形態はSF小説と同じ．違いは客観性．
数学による空想（計算結果）には個人差がない

- 虚数・・・ $i \equiv \sqrt{-1}$ ゆえに $i^2 = -1$ ←空想
  - $\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot -1} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$
- 2次方程式 $s^2 + s + 1 = 0$ の解
  - $s = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- 解は一般に，複素数 $z =$ (数) $\pm$ (数)i

課題2 （固有値のパターン）

- 次の連続時間モデルの固有値を求めよ．
  - $x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = 0$ ※2個の実数
  - $x''(t) + 0\,x'(t) + 9\,x(t) = 0$ ※純虚数
  - $x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0$ ※複素数
- 同じ計算を，text5.xls のシート「2次系の固有値」で行え．係数a，係数b を変更すればよい．

授業のまとめ

- 連続時間モデルを学んだ．
  - 1次系の解は，単独の指数関数．
  - 2次系の解は，2つの指数関数の和．
- 2次系の解の指数を，固有値という．
  - 固有値は，2次方程式を解くと求まる．
  - 固有値には，2個の実数，純虚数，複素数，という3つのパターンがある．

2次方程式の解において，純虚数や複素数は，
必ず±の対で出てくる．複素共役という．

グループ討論

- 連続時間モデルで説明できそうな，実現象の例を挙げよ．