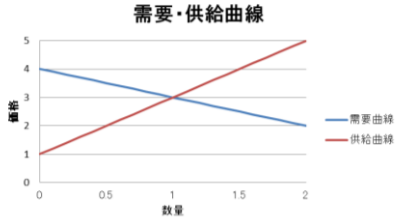
③過渡応答と安定性

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

(復習)需要と供給



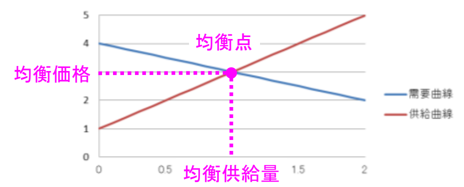
- 需要曲線　※右下がり
  - □ 価格が安い ➔ もっと買いたい (価格付け)
- 供給曲線　※右上がり
  - □ 価格が高い ➔ もっと売りたい (生産調整)

この授業では,「直線」でモデル化

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

(復習)市場の均衡

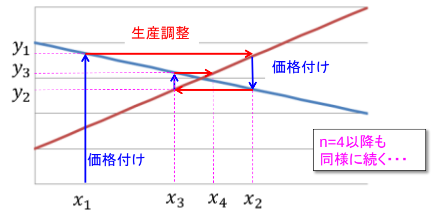


- 市場の均衡点
  - □ 買い手の思惑　＝　売り手の思惑
    - ➔状況を動かすと, どちらかが損をする
    - ➔価格と数量は, それ以上動かない ⇔ 均衡

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

(復習)市場の過渡応答



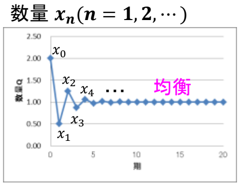
- □ n期の生産量　x_n
- □ n期の価格　$y_n = cx_n + d$　(需要曲線)
- □ $n+1$期の生産量　$x_{n+1} = \frac{1}{a}(y_n - b)$ (供給曲線)

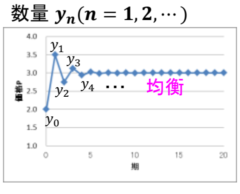
放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

(復習)過渡応答の計算例

数量 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$　　数量 $y_n (n = 1, 2, \cdots)$





- 確かに「減衰振動」している！
  - □市場の「生産調整」が, あたかも復元力のように働き, 振り子によく似たダイナミクスが起きた.

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

市場の離散時間モデル

離散時間
≡ 整数で表した時間

n期の価格　$y_n = cx_n + d$　①(需要曲線)

$n+1$期の生産量　$x_{n+1} = \frac{1}{a}(y_n - b)$　②(供給曲線)

- 生産量　※代入①⇒②
  - □ $x_{n+1} = \frac{1}{a}(cx_n + d - b) = \frac{c}{a}x_n + \frac{d-b}{a}$
- 価格　※代入② ⇒「nを$n+1$にした① $y_{n+1} = cx_{n+1} + d$」
  - □ $y_{n+1} = \frac{c}{a}(y_n - b) + d = \frac{c}{a}y_n + \frac{ad-bc}{a}$
- こんな複雑な式は解きたくない！⇒簡略化？

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

簡略化 ー グラフの平行移動

- 平衡点 $(x',y') = \left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right)$ を原点に

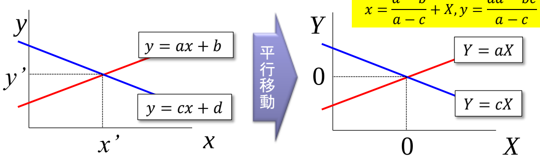
供給曲線　$y = ax + b \Rightarrow (y' + Y) = a(x' + X) + b$

$\therefore Y = aX + ax' + b - y' = aX$　※切片が0に

需要曲線　$y = cx + d \;\Rightarrow (y' + Y) = c(x' + X) + d$

$\therefore Y = cX + cx' + d - y' = cX$

$x = \frac{d-b}{a-c} + X,\ y = \frac{ad-bc}{a-c} + Y$

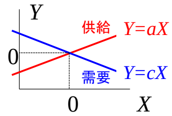


UTSUNOMIYA UNIVERSITY

市場の離散時間モデル（簡略後）

n期の価格　$Y_n = cX_n$　①

$n+1$期の生産量　$X_{n+1} = \frac{1}{a} Y_n$　②



- 生産量　※代入①⇒②

□$X_{n+1} = \frac{1}{a}(cX_n) = \frac{c}{a} X_n \equiv CX_n$　※定数項が消えた

- 価格　※代入②⇒「① $Y_{n+1} = cX_{n+1}$」

□$Y_{n+1} = c\left(\frac{1}{a} Y_n\right) = \frac{c}{a} Y_n \equiv CY_n$

$C = \frac{c}{a}$

市場の離散時間モデル

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》等比数列

等差数列の例：1, 3, 5, 7, 9,11, ･･･
等比数列の例：1, 3, 9, 27, 81, ･･･

- 等比数列の数式表現

□$x_0 = 1 \cdot 3^0,\ x_1 = 1 \cdot 3^1,\ x_2 = 1 \cdot 3^2,\ x_3 = 1 \cdot 3^3$, ･･･

□法則 ⇒　$x_n = 1 \cdot 3^n$　(n = 0, 1, 2, ･･･)

一般形　$x_n = \underbrace{x_0}_{初項}\ \underbrace{C^n}_{公比}$

初項 $x_0 = 1$
公比 $C = 3$

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデルの解

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$

$C = \frac{c}{a}$

解法：初期値 X_0 を与えて，代入を繰り返す

$X_0,\ X_1 = cX_0,\ X_2 = cX_1 = c^2X_0,\ X_3 = cX_2 = c^3X_0$, ･･･

解⇒　生産量 $X_n = C^n X_0$
価格　$Y_n = C^n Y_0$

解は，初項 X_0, Y_0，公比 C の「等比数列」！

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

表1：離散時間モデルの安定性

公比 C	ダイナミクス	数値例（初項 x_0 = 1）
$C < -1$	発散振動	(C = −2)　1, −2, 4, −8, 16, −32, ･･･
$C = -1$	単振動	(C = −1)　1, −1, 1, −1, 1, −1, ･･･
$-1 < C < 0$	減衰振動	(C = −0.2)　1, −0.2, 0.04, −0.008, ･･･
$C = 0$	未定義（不良定義）	考えない
$0 < C < 1$	減衰（非振動的）	(C = 0.2)　1, 0.2, 0.04, 0.008, ･･･
$C = 1$	一定値	(C = 1)　1, 1, 1, 1, 1, 1, ･･･
$1 < C$	発散（非振動的）	(C = 2)　1, 2, 4, 8, 16, 32, ･･･

《実習》 電卓で（Excelでもよい）で確かめよ

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

市場の安定性の解析手順

- 離散時間モデルの導入　※解は等比数列

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$

本格的な市場モデルはもっと複雑で，解も単純な等比数列ではない．

- 公比　$C = \frac{c}{a} = \frac{需要曲線の傾き}{供給曲線の傾き}$　の計算

- 安定性のタイプを「表1」で調べる．

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

課題

1. 供給曲線の傾き a と，需要曲線の傾き c を，好き勝手に選べ．
2. 公比 C = c/a を計算し，「表1」で安定性のタイプを予測し，解の振動波形を大まかにスケッチせよ．
3. スケッチ通りの安定性が得られるか「text2.xls」で検証せよ．

授業のまとめ

- 市場のダイナミクス（動き方）は，離散時間モデルで数式表現できる．
  - □（この授業の）市場モデルの解は等比数列となる．
  - □ゆえに，安定性は公比で決まる（表1）．
- 市場モデルにおける公比は，
  - □ C =（需要曲線の傾き）／（供給曲線の傾き）
  - □ C を表1と照合すると，市場安定性が予測できる．

グループ討論

- 離散時間モデルで説明できそうな，実現象の例を挙げよ．（市場の話題には限定しない）