# 動的均衡と複雑系の科学

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊

この教材は，下記からダウンロードできます．
http://edu.katzlab.jp/lec/hoso/





## 講義内容

① 均衡のメカニズム
② 市場の均衡
③ 過渡応答と安定性
④ 非線形性とカオス
⑤ 連続時間モデル
⑥ ダイナミクスの予測
⑦ ロボットの均衡メカニズム　※グループ討論
⑧ まとめと補足　※グループ発表





## 実現象とモデル

- 現実のモデル化
  - 複雑すぎる現実 ➔ 単純化した模型で理解する
  - そのための模型を「モデル」という．
- モデル ≠ 現実
  - ある現実　➔　複数のモデル
    - 人間 ➔ 力学，生理学，心理学，医学，・・・
  - モデル化誤差
    - モデルには，必ず，誤差が含まれる．
- モデルを信仰してはならない．





## モデル化誤差の例　（戦前の東京）

出典：http://www.youtube.com/watch?v=dCWxEeL9eEo





# ①均衡のメカニズム

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



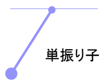


## 均衡のタイプ分け（大分類）

均衡 → 静的
均衡 → **動的** → 過渡応答（ダイナミクス） → **安定** / **不安定**

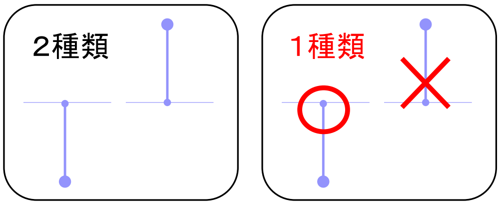
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 静的均衡と動的均衡




- 単振り子の均衡
  - ⇔ 右に行こうとする力 = 左に行こうとする力

静的に実現する均衡　　動的に実現する均衡

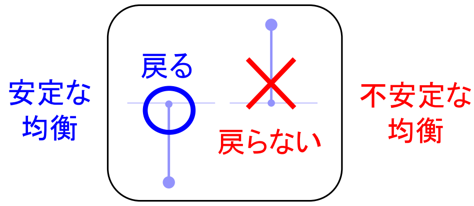



放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 動的均衡と安定性

- ちょっとずらして元に戻るか？

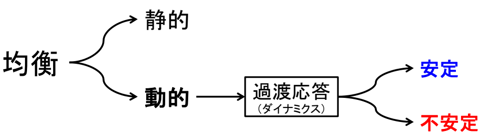



静的平衡には無かった区別！

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

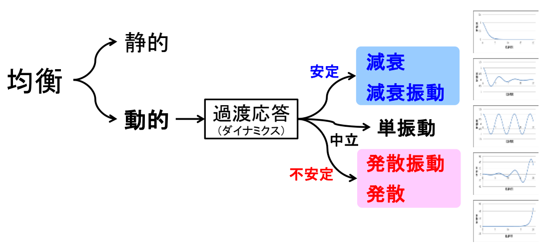
## 均衡のタイプ分け（大分類）




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 均衡のタイプ分け（内訳）

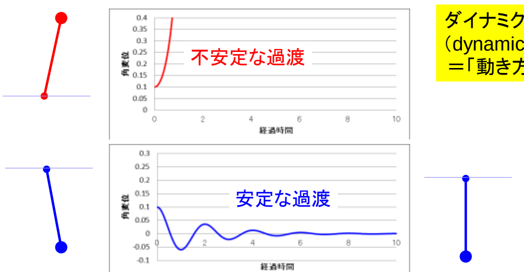



放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 動的均衡と過渡応答

- 過渡応答 ⇔ 均衡に至るまでのダイナミクス




ダイナミクス
（dynamics）
＝「動き方」

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 動的均衡と振動

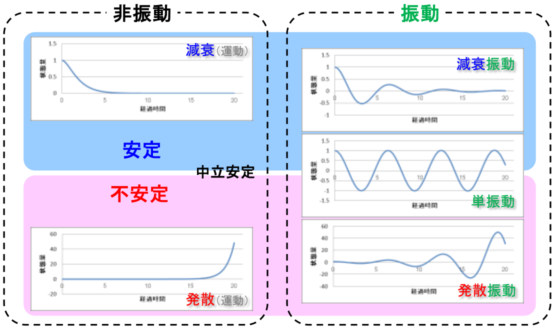
- 動的均衡は「振動」を引き起こす．
  - □振動 ⇔ 行ったり来たりするダイナミクス
- 原因は「復元力」
  - □安定な均衡点から，ちょっとずらす
    - ➔ 均衡点に戻ろうとする　※安定なので
    - ➔ 戻り過ぎて，またずれる　（オーバーシュート）
    - ➔ 再度，均衡点に戻ろうとする
    - ➔ 戻り過ぎて，またずれる　・・・その繰り返し

ダイナミクス
（dynamics）
＝「動き方」

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

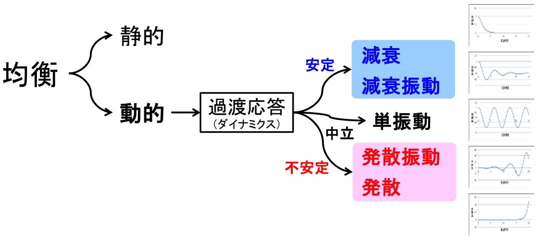
## 均衡の5タイプ




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

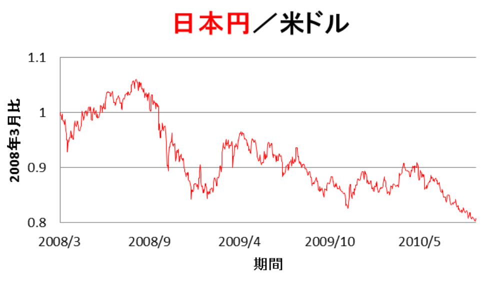
## 均衡のタイプ分け(内訳)




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 実例 ー 円／ドル為替 ※振動




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

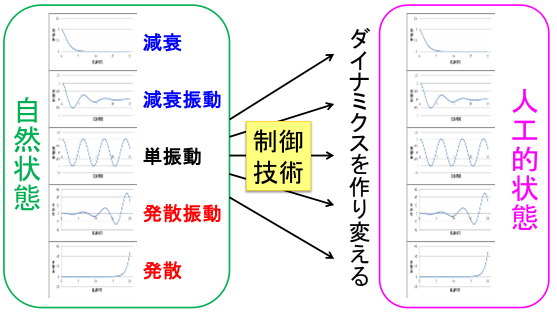
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 実例 ー 複雑な過渡応答

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

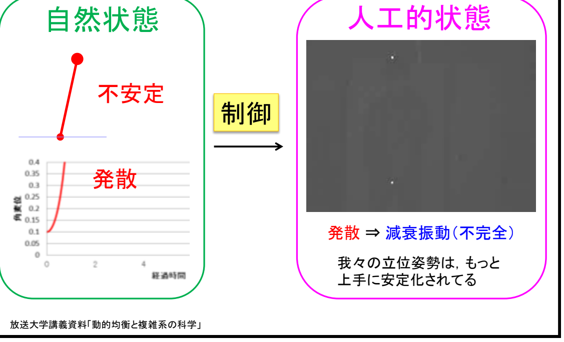
## 動的均衡の「制御」




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

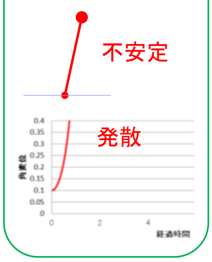
## 実例 ー ヒトによる棒立て制御




放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

## 実例 ― ロボットによる棒立て制御

自然状態




制御

人工的状態

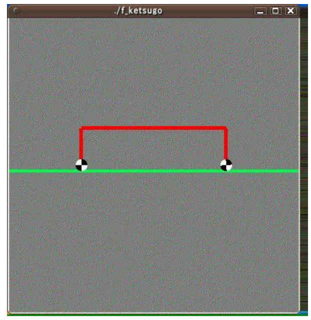
発散 ⇒ 減衰振動(不完全)

ずらすと元に戻る





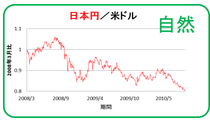
## 実例 ― ロボットの対戦








## 実例 ― 人民元／米ドルレート




自然

中国政府による制御
(為替介入)


人工





## 実例 ― 自転車の立ちこぎ

発散
⇒ 単振動?





## 授業のまとめ

- 均衡には，静的均衡と動的均衡がある．
  - □動的均衡には，過渡応答(ダイナミクス)がある．
- 動的均衡は，過渡応答でタイプ分け．
  - □大分類：安定，中立(安定)，不安定
  - □内訳：減衰，減衰振動，単振動，発散振動，発散
- 動的均衡のタイプを，人為的に変更する技術(制御技術)がある．





## 課題

- 隣接する2名～3名でペアを作る．複数のペアでグループを構成する．
- 各ペアで以下の内容を討論し，その結果を，グループで共有せよ．
  - □動的均衡に関係しそうな，身近な現象を挙げよ．
  - □その現象は，5種類(減衰，減衰振動，単振動，発散振動，発散)のどれを引き起こすか？(複数可)
  - □分類の正否を討論せよ

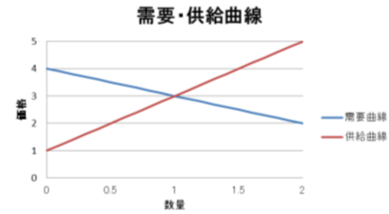
# ②市場の均衡

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊





## 需要と供給




- 需要曲線　※右下がり
  - 価格が安い　➔　もっと買いたい　（価格付け）　※安物買いの銭失い
- 供給曲線　※右上がり
  - 価格が高い　➔　もっと売りたい　（生産調整）

この授業では，「直線」でモデル化





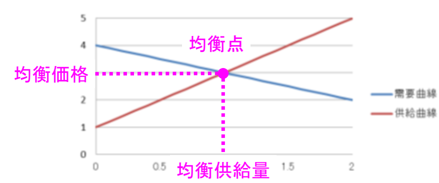
## 私が体験した需要曲線

- 亡父の法事の当日，母が用意したカミソリで無精ひげを剃った．(10＋3本入，メーカー不明，怪しい)
- 血だらけで，ネクタイできず．
- タオルをはさみながら，どこで買ったの？
  - 高齢者御用達の激安スーパー
  - どう見ても，本来5～6本用の袋がパンパン．
  - 隣の5本入り(有名メーカー)と同じ値段だったので，パンパンに詰まった13本入りを選んだ！
- 人間，安ければ要らなくても買う！≡安物買いの銭失い





## 市場の均衡

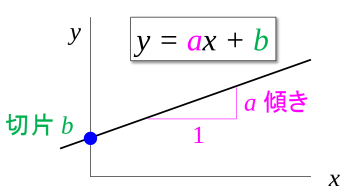



- 市場の均衡点
  - 買い手の思惑＝売り手の思惑
    ➔状況を動かすと，どちらかが損をする
    ➔価格と数量は，それ以上動かない ➔均衡





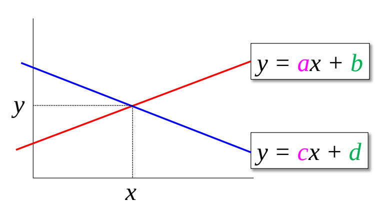
## 《復習》直線の数式表現








## 《復習》直線の交点




解法：　次の2元2連立方程式を解く

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

# 《復習》連立方程式

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = cx + d & \cdots ② \end{cases}$$

※板書

解法：代入して，未知数を消去する

⇒ $ax + b = cx + d$ ※①の $y$ を，②の $y$ に代入

⇒ $ax - cx = d - b$ ※移項

⇒ $(a - c)x = d - b$ ※共通因子のくくり出し

∴ $x = \frac{d-b}{a-c}$ ※両辺を $c - a$ で割る

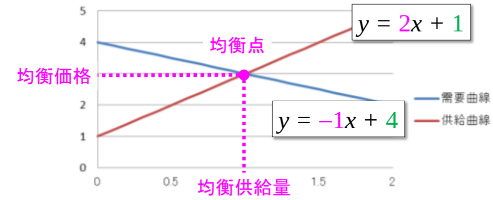
$y = a\frac{d-b}{a-c} + b = \frac{ad-bc}{a-c}$ ※$x$ を①に代入（②でも答えは同じ）

※板書





# 均衡点の計算例




連立方程式の解法より，

均衡供給量 $x = \frac{4-1}{2-(-1)} = 1$

均衡価格 $y = 2(1) + 1 = 3$

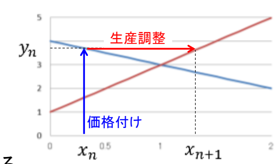
※板書





# 市場の動的モデル（一例）

- 過渡応答の必要条件
  - □時間軸
  - □価格付け（需要曲線）
  - □生産調整（供給曲線）

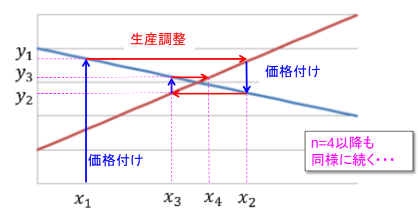


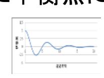

- 動的モデル
  - □$n$期の生産量を$x_n$とする
  - □$n$期の価格 $y_n = cx_n + d$ （需要曲線）
  - □$n+1$期の生産量 $x_{n+1} = \frac{1}{a}(y_n - b)$
    $\because y_n = ax_{n+1} + b$ （供給曲線）





# 市場の過渡応答



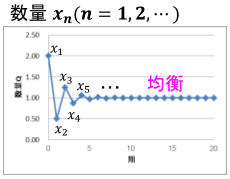

- $x_n$も$y_n$も，振動的に平衡点に近づく！
  - □振り子の減衰振動  によく似た動き？



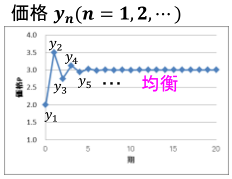


# 過渡応答の計算例

数量 $\boldsymbol{x_n (n = 1, 2, \cdots)}$




価格 $\boldsymbol{y_n (n = 1, 2, \cdots)}$




- 確かに「減衰振動」している！
  - □市場の「生産調整」が，あたかも復元力のように働き，振り子によく似たダイナミクスが起きた．



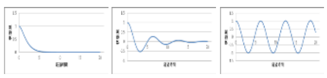


# 授業のまとめ

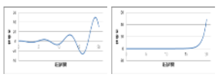
- 市場モデルにも「均衡点」がある
  - □売り手の思惑＝買い手の思惑 ⇒均衡
  - □需要曲線と供給曲線の交点
- 「過渡応答」も自然にモデル化できる
  - □必要なもの･･･時間軸，価格付け，生産調整
  - □本質的要因は「生産調整」の遅延
- 5種類のダイナミクスが引き起こせる（課題参照）
  - □需要･供給曲線の傾きに応じて

# 課題

- 「text2.xls」のa,b,c,dを調整して，5種類のダイナミクスを再現せよ.



減衰　減衰振動　単振動



発散振動　発散





# グループ討論

- 同様の計算で説明できそうな，実現象の例を挙げよ.（市場の話題には限定しない）

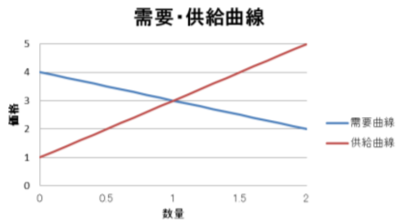
# ③過渡応答と安定性

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）需要と供給



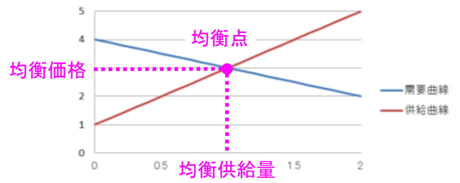

- 需要曲線　※右下がり
  - □ 価格が安い ➔ もっと買いたい （価格付け）
- 供給曲線　※右上がり
  - □ 価格が高い ➔ もっと売りたい （生産調整）

この授業では，「直線」でモデル化

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）市場の均衡

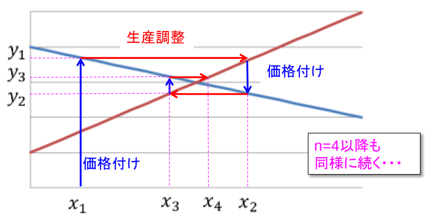



- 市場の均衡点
  - □買い手の思惑　＝　売り手の思惑
    ➔状況を動かすと，どちらかが損をする
    ➔価格と数量は，それ以上動かない ⇔ 均衡

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）市場の過渡応答

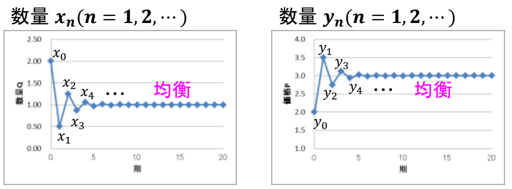



□$n$期の生産量　$x_n$
□$n$期の価格　$y_n = cx_n + d$　（需要曲線）
□$n+1$期の生産量　$x_{n+1} = \frac{1}{a}(y_n - b)$（供給曲線）

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）過渡応答の計算例




- 確かに「減衰振動」している！
  - □市場の「生産調整」が，あたかも復元力のように働き，振り子によく似たダイナミクスが起きた．

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 市場の離散時間モデル

離散時間
≡ 整数で表した時間

$n$期の価格　$y_n = cx_n + d$　①（需要曲線）
$n+1$期の生産量　$x_{n+1} = \frac{1}{a}(y_n - b)$ ②（供給曲線）

- 生産量　※代入①⇒②
  - □$x_{n+1} = \frac{1}{a}(cx_n + d - b) = \frac{c}{a}x_n + \frac{d-b}{a}$
- 価格　※代入②⇒「$n$を$n+1$にした① $y_{n+1} = cx_{n+1} + d$」
  - □$y_{n+1} = \frac{c}{a}(y_n - b) + d = \frac{c}{a}y_n + \frac{ad-bc}{a}$
- こんな複雑な式は解きたくない！⇒簡略化？

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

# 簡略化 ― グラフの平行移動

■ 平衡点 $(x', y') = (\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c})$ を原点に

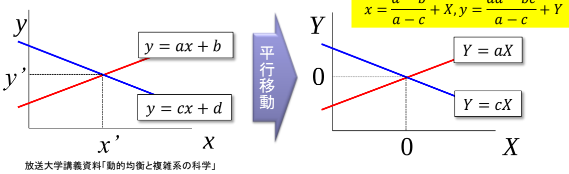
供給曲線　$y = ax + b \Rightarrow (y' + Y) = a(x' + X) + b$

$\therefore Y = aX + ax' + b - y' = aX$　※切片が0に

需要曲線　$y = cx + d \ \Rightarrow (y' + Y) = c(x' + X) + d$

$\therefore Y = cX + cx' + d - y' = cX$

$x = \frac{d-b}{a-c} + X, y = \frac{ad-bc}{a-c} + Y$



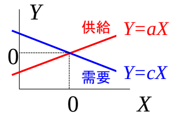





# 市場の離散時間モデル（簡略後）

$n$期の価格　　$Y_n = cX_n$　①

$n+1$期の生産量　$X_{n+1} = \frac{1}{a} Y_n$　②




■ 生産量　※代入①⇒②

□$X_{n+1} = \frac{1}{a}(cX_n) = \frac{c}{a} X_n \equiv CX_n$　※定数項が消えた

■ 価格　※代入②⇒「① $Y_{n+1} = cX_{n+1}$」

□$Y_{n+1} = c\left(\frac{1}{a} Y_n\right) = \frac{c}{a} Y_n \equiv CY_n$

$C = \frac{c}{a}$

市場の離散時間モデル

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$





# 《復習》等比数列

等差数列の例：1, 3, 5, 7, 9,11, ･･･
等比数列の例：1, 3, 9, 27, 81, ･･･

■ 等比数列の数式表現

□$x_0=1 \cdot 3^0, x_1=1 \cdot 3^1, x_2=1 \cdot 3^2, x_3=1 \cdot 3^3$, ･･･

□法則 ⇒　$x_n=1 \cdot 3^n$　($n$ = 0, 1, 2, ･･･)

一般形

$x_n = x_0 C^n$

初項　公比

初項 $x_0 = 1$
公比 $C = 3$





# 離散時間モデルの解

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$

$C = \frac{c}{a}$

解法：初期値 $X_0$ を与えて，代入を繰り返す

$X_0$，$X_1 = cX_0$，$X_2 = cX_1 = c^2 X_0$，$X_3 = cX_2 = c^3 X_0$，･･･

解⇒　生産量 $X_n = C^n X_0$
　　　価格　$Y_n = C^n Y_0$

解は，初項 $X_0$, $Y_0$，公比 $C$ の「等比数列」！





# 表1：離散時間モデルの安定性

| 公比 $C$ | ダイナミクス | 数値例（初項 $x_0 = 1$） |
|---|---|---|
| $C < -1$ | 発散振動 | ($C$ = −2)  1, −2, 4, −8, 16, −32, ･･･ |
| $C = -1$ | 単振動 | ($C$ = −1)  1, −1, 1, −1, 1, −1, ･･･ |
| $-1 < C < 0$ | 減衰振動 | ($C$ = −0.2)  1, −0.2, 0.04, −0.008, ･･･ |
| $C = 0$ | 未定義（不良定義） | 考えない |
| $0 < C < 1$ | 減衰（非振動的） | ($C$ = 0.2)  1, 0.2, 0.04, 0.008, ･･･ |
| $C = 1$ | 一定値 | ($C$ = 1)  1, 1, 1, 1, 1, 1, ･･･ |
| $1 < C$ | 発散（非振動的） | ($C$ = 2)  1, 2, 4, 8, 16, 32, ･･･ |

《実習》 電卓で（Excelでもよい）で確かめよ





# 市場の安定性の解析手順

■ 離散時間モデルの導入　※解は等比数列

生産量　$X_{n+1} = CX_n$
価格　$Y_{n+1} = CY_n$

本格的な市場モデルはもっと複雑で，解も単純な等比数列ではない．

■ 公比　$C = \frac{c}{a} = \frac{\text{需要曲線の傾き}}{\text{供給曲線の傾き}}$　の計算

■ 安定性のタイプを「表1」で調べる．

# 課題

1. 供給曲線の傾き a と，需要曲線の傾き c を，好き勝手に選べ．
2. 公比 C = c/a を計算し，「表１」で安定性のタイプを予測し，解の振動波形を大まかにスケッチせよ．
3. スケッチ通りの安定性が得られるか「text2.xls」で検証せよ．






# 授業のまとめ

- 市場のダイナミクス（動き方）は，離散時間モデルで数式表現できる．
  - □（この授業の）市場モデルの解は等比数列となる．
  - □ゆえに，安定性は公比で決まる（表１）．
- 市場モデルにおける公比は，
  - □$C$ = （需要曲線の傾き）／（供給曲線の傾き）
  - □$C$ を表1と照合すると，市場安定性が予測できる．





# グループ討論

- 離散時間モデルで説明できそうな，実現象の例を挙げよ．（市場の話題には限定しない）

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

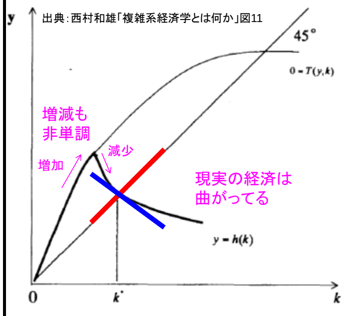
# ④非線形性とカオス

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## あるマクロ経済モデル

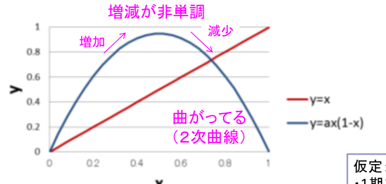



- 線形モデル
  - □1次関数（直線）からなるモデル
- 非線形モデル
  - □それ以外（曲線や折れ線）からなるモデル
- 実現象の多くは非線形！



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 最単純モデル ー Logisticモデル




Logistic Model
1976年，ロバート・メイ
数理生物学者
生物の個体数変動

Logistic
≡ 兵站

仮定：
・1期ごとに産卵・全数死滅
・全数孵化・途中死滅なし

□$n$期の個体数　$x_n$　増殖率

□$n$期の産卵数　$y_n = ax_n(1-x_n)$　（2次曲線）

□$n+1$期の個体数　$x_{n+1} = y_n$　（直線）

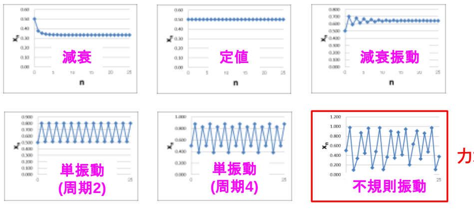
$\Rightarrow$ $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 個体数変動の離散時間モデル



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 課題1　$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 個体数変動の離散時間モデル

- 「text4.xls」の a (増殖率 0～4) を調整し，以下のダイナミクスを再現せよ．




3.9のところを変更

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2次曲 | | x | y=x | y=ax(1−x) | n | xn | | | | |
| 2 | a | 3.9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.500 | 0<x0<1 | | | |
| 3 | 0<a<1 | | 0.04 | 0.04 | 0.14976 | 1 | 0.975 | | | | |



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 非線形特有のダイナミクス

状態量（変数）
$\boxed{x_{n+1}} = a \boxed{x_n}(1-\boxed{x_n})$
パラメータ
（条件を表す定数）

- 分岐現象の発生
  - □パラメータの僅かな変更で，ダイナミクスが激変する．
- カオスの発生
  - □規則的な法則から，不規則現象が起こる．
  （Logisticモデルは乱数の項を持たない）
- 初期値敏感性（カオスの主要因）
  - □初期値 $x_0$ の僅かな変更で，その後のダイナミクスが，かけ離れていく．

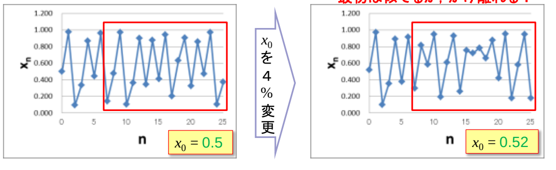


UTSUNOMIYA UNIVERSITY

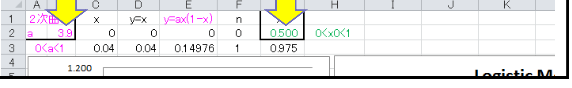
## 課題2　$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 個体数変動の離散時間モデル

- カオスが起こる条件 a=3.9 で「text4.xls」の初期値 $x_0 = 0.5$ を僅かに変更し，ダイナミクスの激変（**初期値敏感性**）を観察せよ．

最初は似てるが，かけ離れる！




3.9にする　0.500のところを変更



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2次曲 | | x | y=x | y=ax(1−x) | n | xn | | | | |
| 2 | a | 3.9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.500 | 0<x0<1 | | | |
| 3 | 0<a<1 | | 0.04 | 0.04 | 0.14976 | 1 | 0.975 | | | | |

# 授業のまとめ

- 一次式で書けないモデルを，非線形モデルという.
  - マクロ経済モデルの非線形性を紹介した.
  - その単純化としてLogisticモデルを取り上げた.
- 非線形特有のダイナミクスがある.
  - 分岐現象（パラメータの変化による激変）
  - 初期値敏感性（初期値の変化による激変）
  - カオス（規則性から生じる不規則現象）





# グループ討論

- カオスかもしれない実現象の例を挙げよ.

(抜粋)西村和雄，複雑系経済学とは何か，東京情報大学研究論集，Vol.2，No.3，pp.147-168.



れは、t - 1 期、t 期、t + 1 期の資本ストックの関数となり、それだけでは t + 1 期の資本ストックを t 期の資本ストック量で定める動学方程式が決まらないのです（図9)。動学方程式を求めるには追加的条件（横断性条件）が必要なのです。動学方程式が明示的に求まらないにも関わらず、循環したり、単調であるという性質を証明しようとすることが難しいのです。一方、他のモデルでは一階の条件が t 期と t+ 1 期の資本ストックにのみ依存するので、t 期の資本ストックの量を t+1 期の資本ストック量に関係付ける動学方程式が導かれます。したがって、効用関数や生産関数に仮定をして、動学方程式が特定の性質を持つようにするのは容易なのです。もし、収穫逓増部分がなければ、オイラー方程式をみたす経路のうち、追加的条件（横断性条件）をみたすものだけが最適解です。しかし、それがわかって、追加的条件をもちいたとしても、オイラー方程式を解いて具体的に最適解や動学方程式を求めることはできません。最も単純なケースでは、具体的に解を求めることをしなくとも最適解の性質がわかり、図5のような、単調性と安定性が証明できます。収穫逓増が入ってくると、このような単純なケースにおいてすら、横断性条件をみたすオイラー方程式のみたす解が最適とは限らなくなり、難しくなるのです。

$$\frac{\partial v\,(k_t, k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} + \frac{\rho\partial v\,(k_{t+1}, k_{t+2})}{\partial k_{t+1}} = 0$$

オイラー方程式は上記の形の式となり、$k_t, k_{t+1}, k_{t+2}$ の関数となる。ρは1より小さい正数で、1期後の効用を割り引いて評価するためのウエイト。これだけからは動学方程式 $k_{t+1} = h(k_t)$ が決まらない。

**図9　オイラー方程式**

**景気循環の証明**

1980年から、私は南カリフォルニア大学に移り、今度は離散時間モデルで、循環が生ずるケースの研究を始めました。

単調性や安定性などの単純な解のふるまいを証明する場合は、より一般的な状況の下で証明することに意味があり、一方、解が複雑にふるまうことを証明する場合は、出来るだけ従来と同じ収穫逓減の仮定を維持しながら、証明することに意味がある。したがって、循環をより良く説明する理論は、出来得るなら収穫逓減の世界、すなわち新古典派理論の枠組みの中で、作られるべきであるというのが私の考えでした。

ところが、従来の経済モデルから導かれる結果の多くは、市場メカニズムがうまく働く限りは、安定的な動学経路が得られるというものです。非線形モデルを用いてはいたけれど、線形モデルで近似でき経済予測も可能なモデルであったのです。しかし、現実には景気は変動し、好況と不況を繰り返しています。これに対する経済学者の立場は、いくつかに分れました。1つは、景気の変動は経済外的要因に左右されるというものです。太陽黒点の変動、気象や戦争などが経済外的要因の例である。更にすすめて、そのような経済外的要因がなければ、政府の政策の誤りのみが不況をもたらす、政府は貨幣供給量の伸び率を一定に制御するだけにして、市場に介入することをしなければ、ほぼ安定した成長ができるというのです。これは、**合理的期待学派**あるいは**新マネタリスト**の見解です。一方、経済外的要因がないとしても、やはり市場にまかせるだけではなく、政府が好況期にインフレを抑え、不況期に需要を喚起するという積極的な経済政策を行なわなければならないという立場もあります。これは、**ケインジアン**の見解です。

私の疑問は、何故景気が変動することが悪いことなのかということです。好況があれば不況が

あり、不況があれば好況があるのは自然なことです。むしろ、不況があるから好況があり、好況があるから不況があると言うべきなのかもしれません。それにも関わらず、これまで数理経済学の結論は、安定な持続的成長をもたらすものばかりでした。とはいえ、景気循環が全く研究されなかったわけではありません。1930年代の大恐慌の後、経済学者は不況から脱出する処方箋かあるいは恐慌の原因を説明する理論のどちらかを模索していました。前者がケインズ経済学を生みだし、後者が景気循環理論を発展させたのです。政府の積極的な役割を重視するケインズ経済学は、今日まで大きな影響を与えてきました。一方、景気循環理論は、サミュエルソン、ヒックス、カルドア、グッドウィンを中心とする人々によって研究されましたが、1950年代を最後に忘れ去られていったのです。これには、1950年頃から先進国の経済が比較的に安定し、大不況の不安がなくなったからという理由もあります。しかし、何より1950年代までの景気循環理論は、市場メカニズムがモデルに反映されない一般性を欠くモデルに基づいていたという理由が大きかったのです。一方、その後主流となる経済動学理論では、市場メカニズムに基づいてはいたが、景気循環を説明することができていませんでした。したがって、景気の変動を起こすのは、経済以外の要因であるとされました。これは、**外生的景気循環理論**とよばれます。

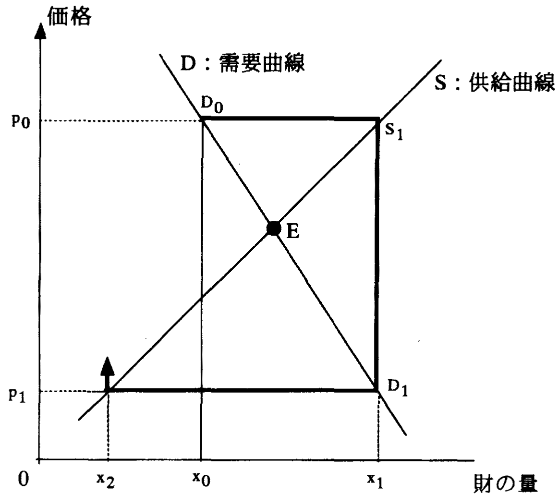



図10 クモの巣モデル

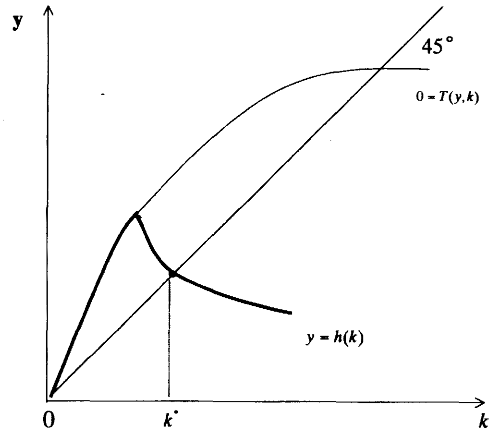



図11

景気循環は経済成長の１つの形態です。成長が止まればゼロ成長、不況が起こればマイナスの成長です。モデルを変えてしまえば循環が説明できることはわかっています。しかし、景気循環が生じるモデルは、経済成長モデルと同じものでなければなりません。

ベンハビブと私は、1979年に発表したホップ分岐の論文では４次元以上でなければ景気循環を説明できなかったので、今度は時間を離散的にとらえて、一階の条件が差分方程式体系で表されるモデルを使って、低い次元でも循環を説明できないかを考え始めました。1981年の夏に私が日本に帰国してからも、連絡を取りながら研究を続けました。この新しい研究は、1981年の終わりまでには完成し、離散時間モデルでは、資本財が１種類であっても、２つ以上の産業からなる経済で景気循環を説明することに成功しました。複数の産業の生産関数を集計化して、経済全体で

の社会的生産関数を導出すると、変数間に強い非線形性が生じます。この非線形性が各部門の生産関数が収穫一定あるいは逓減を示す新古典派型の関数であっても、動学方程式が図11のような形になり循環が生じる要因となるのです。従来のマクロ経済学で用いられてきた、ソロー型と呼ばれる集計的生産関数は、集計的とはよんでいても、集計化に伴って生じる非線形性を反映していなかったので、循環を説明できなかったのです。ベンハビブとのこの論文で、経済の２部門のモデルに限るなら、各部門の資本・労働比率の大小、すなわち要素集約度によって、成長経路が単調であるか、循環するかが決まることが明らかになりました。このように、外的ショックがなくとも経済内の要因で生じる景気循環を**内生的景気循環**と呼びます。

実は、不均衡モデルであれば、循環を説明するのは更に簡単です。図10はクモの巣モデルと呼ばれ、農産物の価格形成の説明に使われる古典的な例です。これは需要曲線 D と供給曲線 S を用いて、市場で成立する価格の変動を説明するモデルの１つです。農産物は一旦生産されると、翌年までは保存が出来ない、そして、年に１回生産され、しかも一旦生産をされると、それを売り切る水準に市場価格が決まると仮定します。図の $x_0$ が今年の生産量とすると、それを売り切る価格は需要曲線状の点 $D_0$ の高さ $p_0$ となります。農家は、今年の価格 $p_0$ をみて、翌年の生産量を供給曲線上の点 $S_1$ で決めます。生産量は $x_1$ です。次の年に $x_1$ が生産されると、価格は、$x_1$ を売り切るように需要曲線上の点 $D_1$ の高さで決まります。このようにして、価格も生産量も、循環するのです。クモの巣モデルが循環を起こすのは、均衡（需要曲線と供給曲線の交点）で価格と生産が決まらないということ、あるいは、即座に生産量を変えることができず、市場で成立する価格をみて決める次の生産量か実現するまでに時間がかかるということが原因です。前者をとらえると、不均衡モデルであるということになり、後者をとらえると、生産量の決定と実際に生産物が出来上がるまでにタイム・ラグがあるということになります。したがって、不均衡や生産のタイム・ラグによって、循環を説明できるのは明らかです。更に、異常気象や戦争など外生的ショックで景気が変動するというのも明らかです。とはいえ、不均衡、外生的ショック、生産のタイム・ラグが原因で景気が変動することを否定しているわけではありません。そのようなことが景気を変動させるのは事実であり、明白です。私の関心は、そのような要因をすべて取り去ったら、景気変動が消滅すると本当にいえるのかということであったのです。

更に、もう１つ、合理性の仮定です。新古典派理論では、企業や個人は合理的な行動をとると仮定します。もし、合理性の仮定をはずすと非合理的な行動は無数にあり、なんでも許されることになります。したがって、非合理的なモデルでは周期解もカオスも何でもありとなります。合理性は、非合理性を測る尺度となりますが、非合理性は合理性を測る尺度となり得ません。同様に均衡は不均衡を測る尺度となりますが、不均衡は均衡を測る尺度となりません。これが非合理的な行動や不均衡の存在を必ずしも否定するわけではないのですが、それでも合理的な行動をする経済主体からなる経済の均衡モデルを研究することをより重要視する理由です。

ベンハビブとの先の論文は、1975年の「ジャーナル・オブ・エコノミック・セオリー」に掲載されました。同じ年に、フランスの数理経済学者グラモンが、最適モデルではないのですが、エコノメトリカに掲載した論文に、ホップ分岐とカオスを扱ったこともあり、経済学における非線形動学が盛んになってきました。経済学におけるカオスの応用ということでは、ベンハビブとデイによる1982年頃の論文も既にありました。しかし、無限期間の最適モデル以外では、図９のオイラー方程式に対応する一階の条件が、$k_t$ と $k_{t+1}$ のみの関数となり、陰関数定理を用いるなら、$k_t$ の関数として、$k_{t+1}$ を導くことができ、動学方程式をカオスを生む関数となるようにするのは

比較的容易なのです。

1983年頃、ベンハビブがイタリアで我々の論文を発表した際に、会場に数学者モントルッキョは、この問題に関心をもち、ロチェスター大学の大学院で私の後輩になるボールドリンとの共同論文で、この問題を解きました。彼等の論文が掲載されたのは1986年のことです。

後になってから、私とデッカーとの論文と私とベンハビブとの論文の中で証明した結果は、ラティス理論の、それぞれがスーパー・モジュラーな関数とサブ・モジュラーな関数について、数学者トップキスが証明した結果から導かれることを知らされました。

### 上田 睆亮先生との出会い

京都大学に赴任した1987年頃から、私と現在慶応義塾大学の矢野誠教授と共、最適動学モデルにおけるカオスの研究を始めました。ボールドリンとモントルッキョに先を越されて、カオスの例はできていると言っても、どのような生産関数や効用関数の下でカオスが生じるかは未だ明らかでなかったからです。

ちょうどその頃、カオスのパイオニアとして著名な工学部電気の上田教授から、新しくスタートする学際的な国際的学術誌の Editorial Board を検討しているが、経済の分野で協力してほしいとのお話しをうけたのです。

上田先生の関係で、日本におけるカオスの専門家である九州大学工学部の香田徹教授や、京都大学の数理解析研の高橋陽一郎教授と知り合うことができました。

その頃、突然に、ボールドリンが連絡をよこしました。国連大学で開かれている「カオスの衝撃」という学際的な国際シンポジウムに参加するために来日したとのこと。上田先生もこのコンファランスに参加されていて、お二人は親しくなったということでした。

その後、1992年の11月に、ロチェスター大学での私の後輩で明治学院大学の高橋青天教授が協力して下さり、非線形動学の国際シンポジウムを開催しました。ボールドリン、シェンクマンなど、当時アメリカのサンタフェ研究所と関係していた経済学者を含め、10人の外国人学者を招待しました。この時、上田教授には特別に講演をお願いして、カオスを発見した当時から論文が世に出るまでのお話しを聞かせて頂いたものです。

この頃、私と矢野誠教授は、国際貿易市場で取り引きをする複数の国の経済の間の景気循環の連動性を調べていました。市場を通じての相互依存がどのように、経済の複雑な動きをもたらすかを分析したのです。市場というネットワークによる複雑系の研究です。一方で、一国の最適動学モデルで、産業が2つある簡単な2部門経済モデルでのカオスの研究もしていました。前者は、1993年の「エコノミック・セオリー」、後者は1995年の「エコノメトリカ」に掲載されました。

## 4．複雑系からポスト複雑系

1992年の12月には、東京大学とサンタフェ研究所の共同のシンポジウムがありました。当時の有馬郎人総長が企画したもので、生物、工学、物理、薬学から東大の教官が発表をしました。経済学では、当時の東大にはカオスの研究者がいないこともあり、私が発表し、私の報告へのコメンターはサンタフェのブライアン・アーサーでした。このシンポジウムで私の前に発表したのが、東大の物理の金子邦彦教授で、その報告にはたいへん興味をもちました。当時はカオスの研究が中心だったのですが、先に矢野教授との1983年に発表した国際貿易市場での研究に加え、複雑系

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# ⑤連続時間モデル

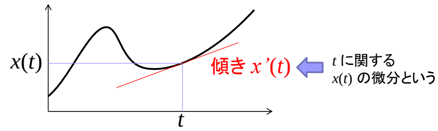
宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 《復習》微分法




- 微分法の例（高校数学）
  1. $x(t) = t^n \Rightarrow x'(t) = nt^{n-1}$ ※整関数
  2. $x(t) = e^{at} \Rightarrow x'(t) = ae^{at}$ ※指数関数　$e^{at}$ =exp($at$)とも書く
  3. $x(t) = \sin(bt) \Rightarrow x'(t) = b\cos(bt)$ ※三角関数
  4. $x(t) = \cos(bt) \Rightarrow x'(t) = -b\sin(bt)$ ※三角関数

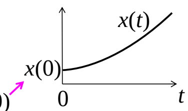


---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 連続時間モデル（1次系）

- 離散時間モデル（差分方程式）
  - □$x_{n+1} = a\, x_n \Rightarrow$ 解　$x_n = a^n \underline{x_0}$ 初項
- 連続時間モデル（微分方程式）
  - □$x'(t) = a\, x(t) \Rightarrow$ 解　$x(t) = e^{at} \underline{x(0)}$ 初期値




証明）解を $t$ で微分すると，
$x'(t) = (e^{at})'x(0) = (a\, e^{at})x(0)$ ※微分法の例 2
$= a\,(e^{at} x(0)) = a\, x(t)$ //

微分方程式 ＝ 変数とその微分からなる方程式のこと

課題1：text5.xls の「指数関数」シートを開き，係数a を変更しながら，解 $x(t) = e^{at} x(0)$ のグラフの変化を観察せよ．



---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 連続時間モデル（1次系）の安定性

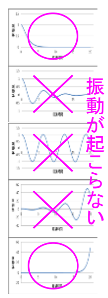
- 連続時間モデル（微分方程式）

$$x'(t) = a\, x(t) \Rightarrow \text{解}\quad x(t) = e^{at} x(0)$$

- 安定性

| 係数 a の条件 | 解 x(t) の動き | 安定性の名称 |
|---|---|---|
| a < 0 | 0に収束 | 漸近安定 |
| a = 0 | 一定値 | 中立安定 |
| 0 < a | ∞に発散 | 不安定 |

5種類のダイナミクスの2種類しか出てこない！






---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

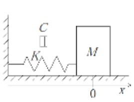
## 振動が起こる連続時間モデル

- 最低でも，2次系！

$$x''(t) + a\, x'(t) + b\, x(t) = 0$$

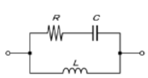
- 2次系の例
  - □機械振動系（$x$は変位）

    $m\, x''(t) + c\, x'(t) + k\, x(t) = 0$




  - □共振回路（$q$は電荷）

    $L\, q''(t) + R\, q'(t) + q(t)/C = 0$






---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 連続時間モデル（2次系）

- 1次系　係数がそのまま入る

$$x'(t) = a\, x(t) \Rightarrow \text{解}\ x(t) = \text{定数} \times \exp(a\, t)$$

- 2次系

$$x''(t) + a\, x'(t) + b\, x(t) = 0$$

違う係数が入る

$$\Rightarrow \text{解}\ x(t) = \text{定数} \times \exp(s_1 t) + \text{定数} \times \exp(s_2 t)$$

- 新たな係数 $s_1, s_2$ を「固有値」という．

## 固有値の求め方

- 連続時間モデル（2次系）

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

同じ係数の2次方程式

- 固有方程式

$$s^2 + a\,s + b = 0$$

解く

解の公式

- 固有値

$$s_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\quad s_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$





## 《復習》2次方程式と複素数

**数学は紙に文字で書く空想**
存在形態はSF小説と同じ．違いは客観性．
数学による空想（計算結果）には個人差がない

- 虚数 ･･･ $i \equiv \sqrt{-1}$ ゆえに $i^2 = -1$ ←空想
  - $\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot -1} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$
- 2次方程式 $s^2 + s + 1 = 0$ の解
  - $s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
- 解は一般に，複素数 $z = (数) \pm (数) i$





## 課題2 （固有値のパターン）

- 次の連続時間モデルの固有値を求めよ．
  - $x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = 0$ ※2個の実数
  - $x''(t) + 0\,x'(t) + 9\,x(t) = 0$ ※純虚数
  - $x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0$ ※複素数
- 同じ計算を，text5.xls のシート「2次系の固有値」で行え．係数a，係数b を変更すればよい．





## 授業のまとめ

- 連続時間モデルを学んだ．
  - 1次系の解は，単独の指数関数．
  - 2次系の解は，2つの指数関数の和．
- 2次系の解の指数を，固有値という．
  - 固有値は，2次方程式を解くと求まる．
  - 固有値には，2個の実数，純虚数，複素数，という3つのパターンがある．

2次方程式の解において，純虚数や複素数は，必ず±の対で出てくる．複素共役という．





## グループ討論

- 連続時間モデルで説明できそうな，実現象の例を挙げよ．

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# ⑥ダイナミクスの予測

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）固有値の求め方

- 連続時間モデル（2次系）

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

同じ係数の2次方程式

- 固有方程式

$$s^2 + a\,s + b = 0$$

解く

解の公式

- 固有値

$$s_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\quad s_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 目標 （固有値によるダイナミクスの予測）

- 以下の連続時間モデルの振動波形を予測し，スケッチせよ．
  - □$x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = 0$
    - 固有値: $s_1 = -2,\ s_2 = -1$
  - □$x''(t) + 0\,x'(t) + 9\,x(t) = 0$
    - 固有値: $s_1 = -3i,\ s_2 = 3i$
  - □$x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0$
    - 固有値: $s_1 = -1-3i,\ s_2 = -1+3i$

これらの解 $x(t)$ は
どう動くのか？



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 演習1

- text6.xls の各シートの振動波形を観察し，該当する性質にチェック☑せよ．

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ （□減衰 □一定 □発散）（□振動 □非振動）



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 解答例

複素数 $\underbrace{\alpha}_{\text{実部}} + \underbrace{\beta}_{\text{虚部}} i$

1. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = -1$ （☑減衰 □一定 □発散）（□振動 ☑非振動）
2. 実数 $s_1 = +2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 ☑発散）（□振動 ☑非振動）
3. 実数 $s_1 = -2,\ s_2 = +1$ （□減衰 □一定 ☑発散）（□振動 ☑非振動）
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ （□減衰 ☑一定 □発散）（☑振動 □非振動）
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ （☑減衰 □一定 □発散）（☑振動 □非振動）
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ （□減衰 □一定 ☑発散）（☑振動 □非振動）

- 固有値の実部 ･･･ （－）減衰，（＋）発散，（±）発散
- 固有値の虚部 ･･･ （≠0）振動，（0）非振動



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 固有値とダイナミクスの関係

- 固有値の実部
  - □全て（－）なら，収束．
  - □1つでも（＋）なら，発散．

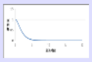
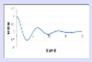
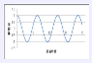
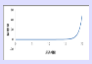
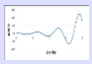
複素数 $\underbrace{\alpha}_{\text{実部}} + \underbrace{\beta}_{\text{虚部}} i$

- 固有値の虚部
  - □有れば（≠0），振動．
  - □無ければ，非振動．

# 連続時間モデル（2次系）の安定性

- 固有値の実部，虚部から，すぐ分かる！

複素数 $\underset{\text{実部}}{\alpha} + \underset{\text{虚部}}{\beta} i$

| 分類表 | 虚部＝0 | | 虚部≠0 | |
|---|---|---|---|---|
| 実部が全て（－） | 減衰・非振動 |  | 減衰・振動 |  |
| 実部が0 | 一定値 | | 単振動 |  |
| 実部が1つでも（＋） | 発散・非振動 |  | 発散・振動 |  |



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# 課題2 （固有値によるダイナミクスの予測）

- 以下の連続時間モデルの振動波形を予測し，スケッチせよ．

各固有値を前頁の「分類表」と照合すればよい

□$x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = 0$
- 固有値: $s_1 = -2,\ s_2 = -1$

□$x''(t) + 0\,x'(t) + 9\,x(t) = 0$
- 固有値: $s_1 = -3i,\ s_2 = 3i$

□$x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0$
- 固有値: $s_1 = -1 - 3i,\ s_2 = -1 + 3i$

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# 授業のまとめ

- 連続時間モデルのダイナミクス（振動波形）は，固有値の実部と虚部から，すぐ分かる．

□実部 ・・・ 減衰するか（－），発散するか（＋）

□虚部 ・・・ 振動するか（≠0），しないか（＝0）

を表す！

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# グループ討論

- 減衰が問題になる実現象の例を挙げよ．
- 振動が問題になる実現象の例を挙げよ．

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# ⑦ロボットの 均衡メカニズム
（グループ討論・次回発表）

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊

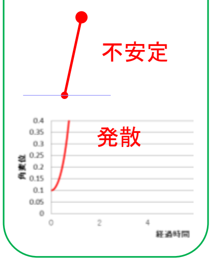


---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 立位ロボットの実例

自然状態




制御 →

人工的状態

発散 ⇒ 減衰振動（不完全）
ずらすと元に戻る

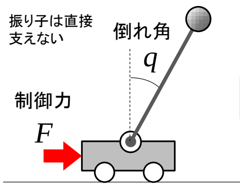


---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 不安定性の原理モデル

■ 倒立振り子モデル（台車が付いた振り子）




簡略化した運動方程式　2次系

$q''(t) - g\,q(t) = -F$

※ $g$≒9.8・・・ 重力加速度

どのような $F$ を与えれば，振り子は安定に立つか？

ヒント：安定に立つ ⇒ $q(t)$ が 0 に減衰する　⇒ 分類表



---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## （復習）$x''(t)+a\,x'(t)+b\,x(t) = 0$ の安定性

■ 固有値の実部，虚部から，すぐ分かる！

複素数 $\alpha$ + $\beta i$（$\alpha$：実部，$\beta$：虚部）

| 分類表 | 虚部＝0 | 虚部≠0 |
|---|---|---|
| 実部が全て(－) | 立つ！ 減衰・非振動 | 立つ！ 減衰・振動 |
| 実部が0 | 一定値 | 単振動 |
| 実部が1つでも(＋) | 発散・非振動 | 発散・振動 |



---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 制御しないとき（$F$=0）のダイナミクス

簡略化した運動方程式

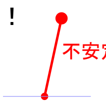
$q'' - g\,q = -F = 0$

同じ係数の2次方程式

$s^2 - g = 0$ ⇒ 固有値 $s_1 = -\sqrt{g},\ s_2 = +\sqrt{g}$

非振動・発散 ⇐ 正の実部 虚部なし

■ スイッチを切ったロボットは倒れる！
□倒れ角 $q(t)$ が単調に増加する．
□逆さにした単振り子の性質．



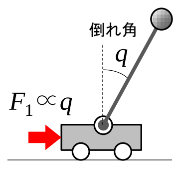



---

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 均衡を実現する制御（比例制御）

■ 倒れ角 $q$ に比例した力で，台車を押す．　比例制御という




$F = F_1 = K\,q$ とすると　$K$ をゲインという

$q'' - g\,q = -F_1 = -K\,q$

$q'' - (g - K)q = 0$　移項して整理

⇒ 固有値 $s_1, s_2 = \pm\sqrt{g - K}$

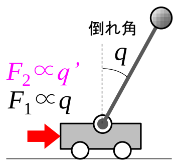
■ ゲイン $K$ を十分大きくすると，$g - K < 0$.
⇒ $s_1, s_2 = \pm\sqrt{K - g}\ i$ (純虚数) ⇒ **単振動**

■ 比例制御で転倒は無くなるが，静止はできない．

## 安定を実現する制御（微分制御）

- 角速度 $q'$ に比例した力も加える.

微分制御という




$F = F_1 + F_2 = K q + L q'$とすると

$q'' - g q = - F = - K q - L q'$

$\boxed{q'' + L q' - (g - K) q = 0}$

⇒ 固有値 $s_1, s_2 = \dfrac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4(g-K)}}{2}$

- $s_1, s_2$ の実部が全て(−)になる, $K, L$ を選ぶ
  ⇒ 減衰・非振動 or 減衰・振動 が実現する.
- 比例＋微分制御で，ロボットは立つ！





## 授業のまとめ

- ヒトやロボットの立位バランスは，次の要素の組合せでモデル化できる.
  - □倒立振り子モデル （力学的な不安定性）
  - □比例制御・微分制御 （平衡と安定の実現）

比例制御＋微分制御を，PD制御という

- 制御のゲインの設計は，固有値で行う.
  - □実部 ・・・ 減衰するか(−)，発散するか(＋).
  - □虚部 ・・・ 振動するか(≠0)，しないか(＝0).





## 討論課題 （ゲイン調整）

- グループで討論し，ロボットが立つゲイン$K, L$ の具体値を提案せよ.
  - □ $K, L$の組み合せは無数にとれる.
  - □ 減衰・振動 or 減衰・非振動の選択肢がある.
  - □ 皆さんは，エイヤーで1つ選定する.（設計技術者の臨場感）
- 次回の中盤で，各グループ5分程度，以下を発表せよ.
  - □ 提案するゲイン$K, L$の値.
  - □ 対応する固有値.
  - □ 選定の理由.

最悪，当て推量であろうが，なんだろうが，必ず$K, L$の値と理由を提示する.

- 選定の正否は，ロボット・シミュレータで検証する.

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

# ⑧まとめと補足

（グループ発表・検証）

宇都宮大学　工学研究科
准教授　吉田勝俊



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## グループ討論

- 発表
  - □各グループ5分程度.
  - □ゲイン $K, L$ の選定値と，理由を発表せよ.
- 検証
  - □text8.xls のシート「ロボット・シミュレータ」にゲイン$K, L$を代入し，運動を観察する.
  - □教員が行うが，できる人は自分で実行してよい.

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

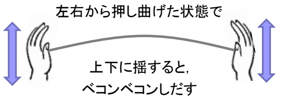
UTSUNOMIYA UNIVERSITY

## 全体のまとめ

- 動的均衡は過渡応答の安定性で分類可能.
  - □ 減衰，減衰振動，単振動，発散振動，発散.
- 動的均衡のモデル（模型）が作れる.
  - □ 離散時間モデル・・・解は，等比数列
    - 「公比＜1」で減衰，「1＜公比」で発散.
  - □ 連続時間モデル・・・解は，指数関数
    - 固有値実部が（－）で減衰，（＋）で発散.
    - 固有値虚部が（0）で非振動，（≠0）で振動.
- カオスの発生
  - □ 規則的な法則から，不規則な現象が起こることがある.
- 具体例：市場の均衡，立位ロボットの均衡，・・・etc

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY




## 補足（2次系のカオス）

- 座屈させたプラ定規を，規則的に揺らしたときの運動.
- 規則的に揺すってるのに，不規則振動が起こる.
- 原因は非線形な（1次関数で書けない）復元力．※ベコンベコン
- 興味があれば，text8.xls の「2次系のカオス」を見よ.

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」