

⑥ダイナミクスの予測

宇都宮大学 工学研究科
准教授 吉田勝俊

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

(復習)固有値の求め方

■ 連続時間モデル(2次系)

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

■ 固有方程式

$$s^2 + a s + b = 0$$

■ 固有値

$$s_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad s_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

目標 (固有値によるダイナミクスの予測)

■ 以下の連続時間モデルの振動波形を予測し、スケッチせよ。

$$\square x''(t) + 3 x'(t) + 2 x(t) = 0$$

$$\blacksquare \text{固有値: } s_1 = -2, s_2 = -1$$

$$\square x''(t) + 0 x'(t) + 9 x(t) = 0$$

$$\blacksquare \text{固有値: } s_1 = -3i, s_2 = 3i$$

$$\square x''(t) + 2 x'(t) + 10 x(t) = 0$$

$$\blacksquare \text{固有値: } s_1 = -1 - 3i, s_2 = -1 + 3i$$

これらの解 $x(t)$ は
どう動くのか？

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

演習1

■ text6.xls の各シートの振動波形を観察し、該当する性質にチェック☑せよ。

1. 実数 $s_1 = -2, s_2 = -1$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)
2. 実数 $s_1 = +2, s_2 = +1$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)
3. 実数 $s_1 = -2, s_2 = +1$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☐ 非振動)

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

解答例

$$\text{複素数 } \alpha + \beta i$$

実部 虚部

1. 実数 $s_1 = -2, s_2 = -1$ (☒ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☐ 振動 ☒ 非振動)
2. 実数 $s_1 = +2, s_2 = +1$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☒ 発散) (☐ 振動 ☒ 非振動)
3. 実数 $s_1 = -2, s_2 = +1$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☒ 発散) (☐ 振動 ☒ 非振動)
4. 純虚数 $s_1, s_2 = \pm 3i$ (☐ 減衰 ☒ 一定 ☐ 発散) (☒ 振動 ☐ 非振動)
5. 複素数 $s_1, s_2 = -1 \pm 3i$ (☒ 減衰 ☐ 一定 ☐ 発散) (☒ 振動 ☐ 非振動)
6. 複素数 $s_1, s_2 = +1 \pm 3i$ (☐ 減衰 ☐ 一定 ☒ 発散) (☒ 振動 ☐ 非振動)

- 固有値の実部 ... (-) 減衰, (+) 発散, (±) 発散
- 固有値の虚部 ... (≠ 0) 振動, (0) 非振動

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

固有値とダイナミクスの関係

■ 固有値の実部

- ☐ 全て(-)なら, 収束.
- ☐ 1つでも(+)なら, 発散.

$$\text{複素数 } \alpha + \beta i$$

実部 虚部

■ 固有値の虚部

- ☐ 有れば(≠ 0), 振動.
- ☐ 無ければ, 非振動.







放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル(2次系)の安定性

■ 固有値の実部, 虚部から, すぐ分かる!

複素数 $\alpha + \beta i$
実部 虚部

分類表	虚部=0	虚部≠0
実部が全て(-)	減衰・非振動 	減衰・振動 
実部が0	一定値 	単振動 
実部が1つでも(+)	発散・非振動 	発散・振動 

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

課題2 (固有値によるダイナミクスの予測)

■ 以下の連続時間モデルの振動波形を予測し, スケッチせよ.

各固有値を前頁の「分類表」と照合すればよい

□ $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$
■ 固有値: $s_1 = -2, s_2 = -1$

□ $x''(t) + 0x'(t) + 9x(t) = 0$
■ 固有値: $s_1 = -3i, s_2 = 3i$

□ $x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 0$
■ 固有値: $s_1 = -1 - 3i, s_2 = -1 + 3i$

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

授業のまとめ

■ 連続時間モデルのダイナミクス(振動波形)は, 固有値の実部と虚部から, すぐ分かる.

□ 実部 ... 減衰するか(-), 発散するか(+)

□ 虚部 ... 振動するか(≠0), しないか(=0)

を表す!

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

グループ討論

■ 減衰が問題になる実現象の例を挙げよ.

■ 振動が問題になる実現象の例を挙げよ.

放送大学講義資料「動的均衡と複雑系の科学」