

第1回 動的システム入門

平衡点と相軌道

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

自己紹介

- 宇都宮大学准教授 栃木県の国立大学
 - 機械システム工学科 / 機械知能工学専攻
 - 担当授業：機械力学，機構学，ロボット力学
- 研究分野
 - マルチヒューマンダイナミクス (手押し相撲)
 - ロボティクス (対戦・協調ロボットシステム)
 - 複雑系工学 (カオス，非線形制御)



学習目標

■ 動的システム

- それが何か，短く説明できる．
- 運動方程式を 1 階化して，状態方程式が作れる．

■ 平衡点と安定性

- 状態方程式から，平衡点を計算できる．
- 安定な平衡点と，不安定な平衡点を区別できる．

■ 時間応答と相軌道

- それぞれの描き方が分かる．

動的システムとは？

■ 時間変動する要素のあつまり。(自然物, 人工物)

ロボット, 化学反応

[動画再生]

為替レート

日本円／米ドル



状態変数

- 状態変数 $\overset{\text{定義}}{\rightleftarrows}$ 動的システムの状態を表す数ベクトル。

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \overset{\text{短縮}}{\underset{\text{表記}}{\rightleftarrows}} \quad \boldsymbol{x}(t) = [x_i(t)]$$

- その時間微分：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \cdot \equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad \overset{\text{短縮}}{\underset{\text{表記}}{\rightleftarrows}} \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) \equiv [\dot{x}_i(t)]$$

例題 状態量 $x(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$ の時間微分 $\dot{x}(t)$ を求めよ。

解答例

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \equiv \begin{bmatrix} (\cos 2t) \cdot \\ (\sin 2t) \cdot \\ (e^{-3t}) \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sin 2t \\ 2 \cos 2t \\ -3e^{-3t} \end{bmatrix} //$$

状態方程式

定義

状態 $x(t)$ を解とする方程式 . (1 階の微分方程式)

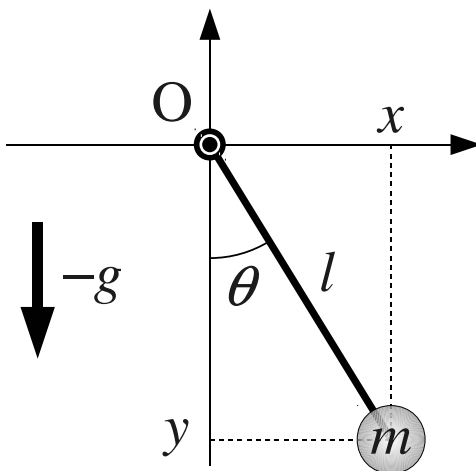
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow \text{解 } \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

線形と非線形

行列で書けるもの $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を線形 , 書けないものを非線形という .

単振り子 (動的システムの例)



$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k \sin \theta = 0, \quad c = \gamma/(ml^2), \quad k = g/l$$

2 階微分 $\ddot{\theta}$ があり, 状態方程式と形が合わない!

単振り子の「1階化」

目標

2階1変数

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k \sin \theta = 0$$



1階2変数

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

■ $x_1 \equiv \theta$, $x_2 \equiv \dot{\theta}$ とおく .

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad \therefore \dot{x}_1 = x_2$$

■ $\ddot{\theta} = (\dot{\theta})' = \dot{x}_2$ を使うと , 単振り子の運動方程式は ,

$$\dot{x}_2 + c x_2 + k \sin x_1 = 0 \quad \therefore \dot{x}_2 = -c x_2 - k \sin x_1$$

単振り子の「状態方程式」

- 得られた連立微分方程式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -c x_2 - k \sin x_1 \end{cases}$$

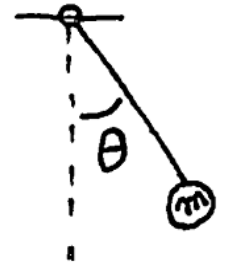
- 単振り子の状態方程式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -c x_2 - k \sin x_1 \end{bmatrix}$$

- 単振り子の状態量：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

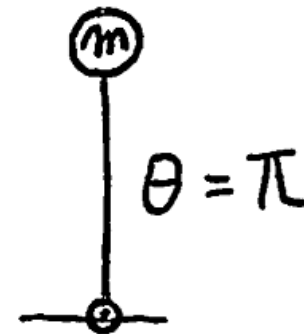
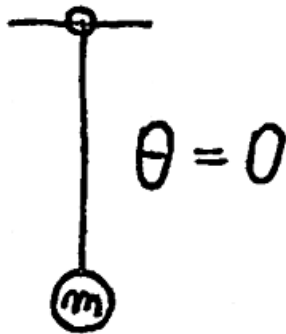
単振り子の「平衡点」



■ 平衡点 ^{定義} そこに置くと静止する点

■ 安定平衡点

■ 不安定平衡点

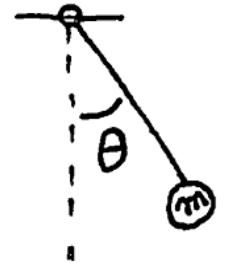


■ ずれても復元する。

■ ずれると復元しない。

単振り子には、安定、不安定の2つの平衡点がある。

平衡点の計算法



■ 平衡点 $\overset{\text{定義}}{\longleftrightarrow}$ そこに置くと 静止 する点

■ 静止 \implies 速度 0 $\therefore \dot{\theta} = \dot{x}_1 = 0$

■ 速度 0 を保つ \implies 加速度 0 $\therefore \ddot{\theta} = \dot{x}_2 = 0$

平衡条件

$$\text{状態変数の時間微分 } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

例題 単振り子 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -c x_2 - k \sin x_1 \end{bmatrix}$ の平衡点を求めよ。

解答例

平衡条件 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -cx_2 - k \sin x_1 \end{bmatrix}$ より ,

平衡点は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dots, \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \dots //$

実習 1.1 Code 1 を実行し，単振り子の安定平衡点と不安定平衡点を観察せよ．

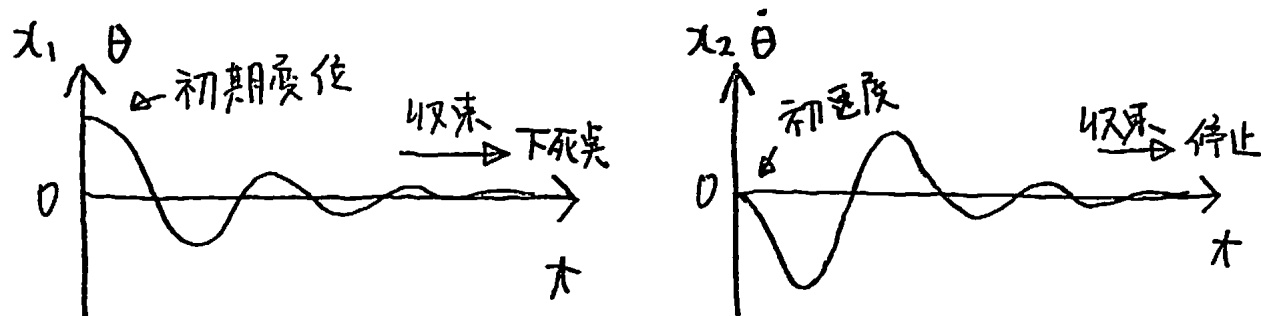
初期値 x_0 を $[0; 0]$ の付近にすれば安定平衡点 (下死点) まわりの挙動が観察できる． $[\pi; 0]$ の付近にすれば不安定平衡点 (上死点) まわりの挙動となる．

動画

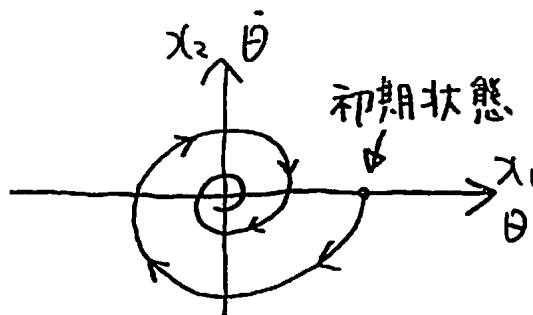
安定平衡点近くの運動 [再生]
不安定平衡点近くの運動 [再生]

動的システムのグラフ — 時間応答と相軌道

■ 時間応答 \rightleftarrows 定義 状態変数の各成分の時間波形



■ 相軌道 \rightleftarrows 定義 状態変数の軌跡



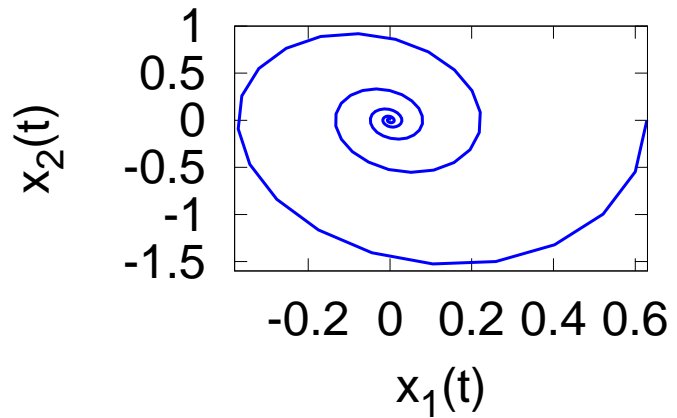
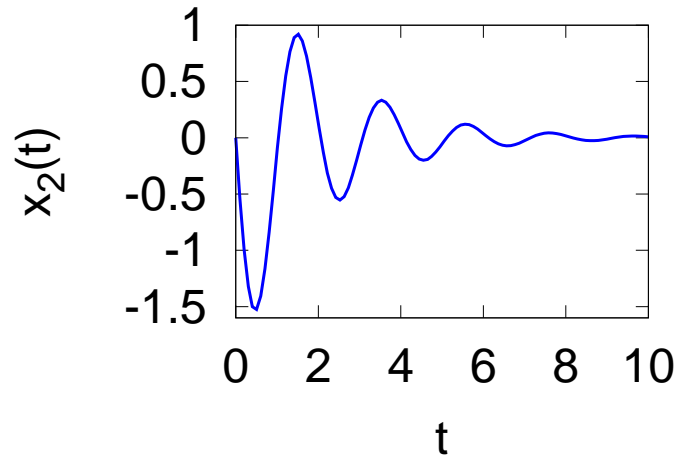
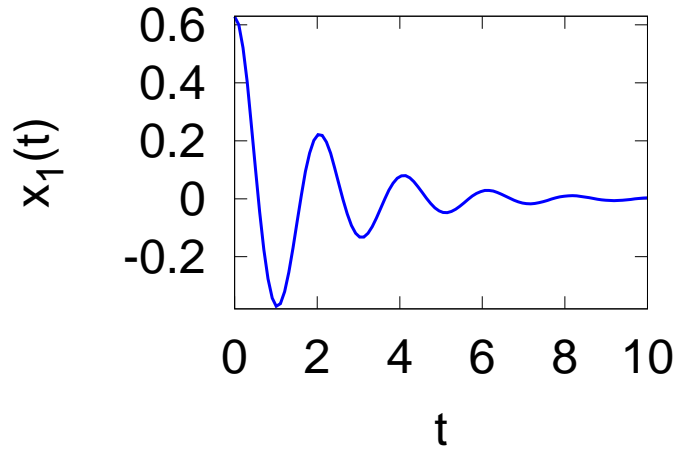
実習 1.2 Code 1 の単振り子の運動について，角変位 $x_1(t)$ と角速度 $x_2(t)$ の時間応答と，相軌道 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ を観察せよ．

Code 1 の for から endfor までを，

```
subplot(2,2,1); plot(tt,xx(:,1));  
xlabel("t"); ylabel("x_1(t)");  
subplot(2,2,2); plot(tt,xx(:,2));  
xlabel("t"); ylabel("x_2(t)");  
subplot(2,2,3); plot(xx(:,1),xx(:,2));  
xlabel("x_1(t)"); ylabel("x_2(t)");
```

に書き換えると， $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の時間応答と，相軌道 $(x_1(t), x_2(t))$ が観察できる．

実行例



第2回 動的システム入門

ベクトル場と線形化

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

■ ベクトル場

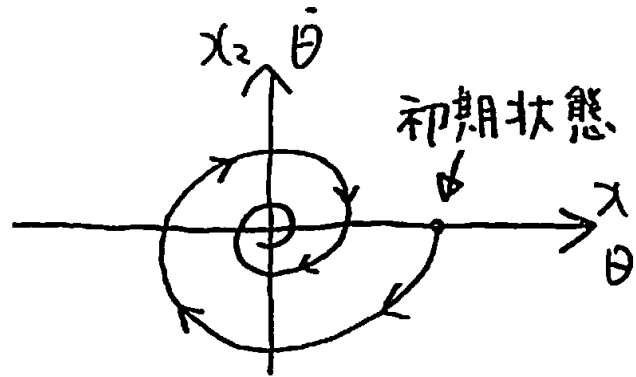
- 状態方程式のベクトル場が描ける．
- ベクトル場から相軌道を予測できる．
- ベクトル場から安定性を予測できる．

■ 線形化

- 状態方程式から，線形化方程式を導出できる．
- 線形化によって，ベクトル場がどう変わるか説明できる．
- 線形化の限界を，ベクトル場で説明できる．

(相軌道と平衡点)

■ 単振り子の相軌道



- 渦巻の中心に，安定平衡点がある．
- 初期状態を変えると，別の渦巻が得られる．

■ 見えない渦巻を全体視する作図法 ⇨ ベクトル場！

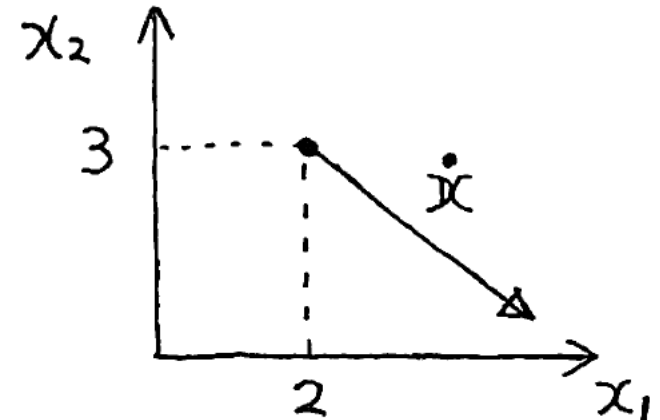
ベクトル場の描き方

1. 状態方程式を「速度の定義式」とみる．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix} \quad (k=1, c=1/2 \text{ とした})$$

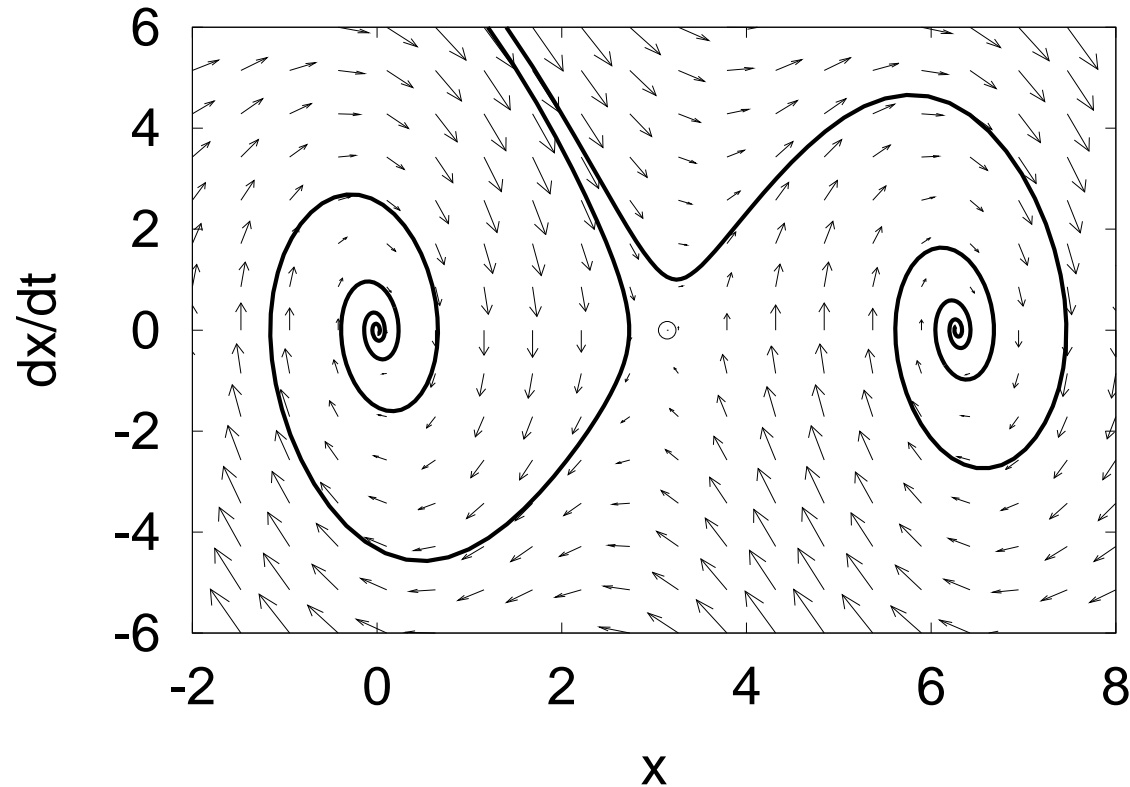
2. 位置 $x = (2, 3)$ を代入する．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sin 2 - \frac{3}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -2.41 \end{bmatrix}$$



3. 得られた矢印 \dot{x} を，相空間の $x = (2, 3)$ の位置に描く．

単振り子の「ベクトル場」

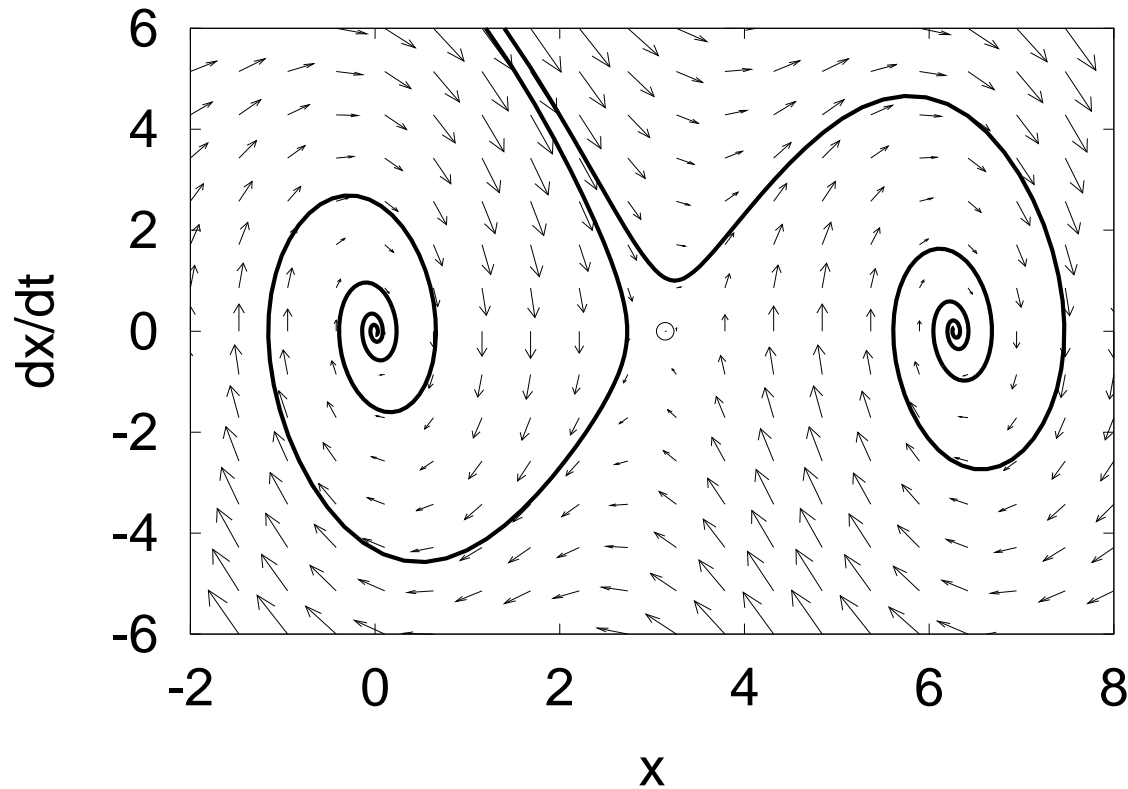


実線が
相軌道

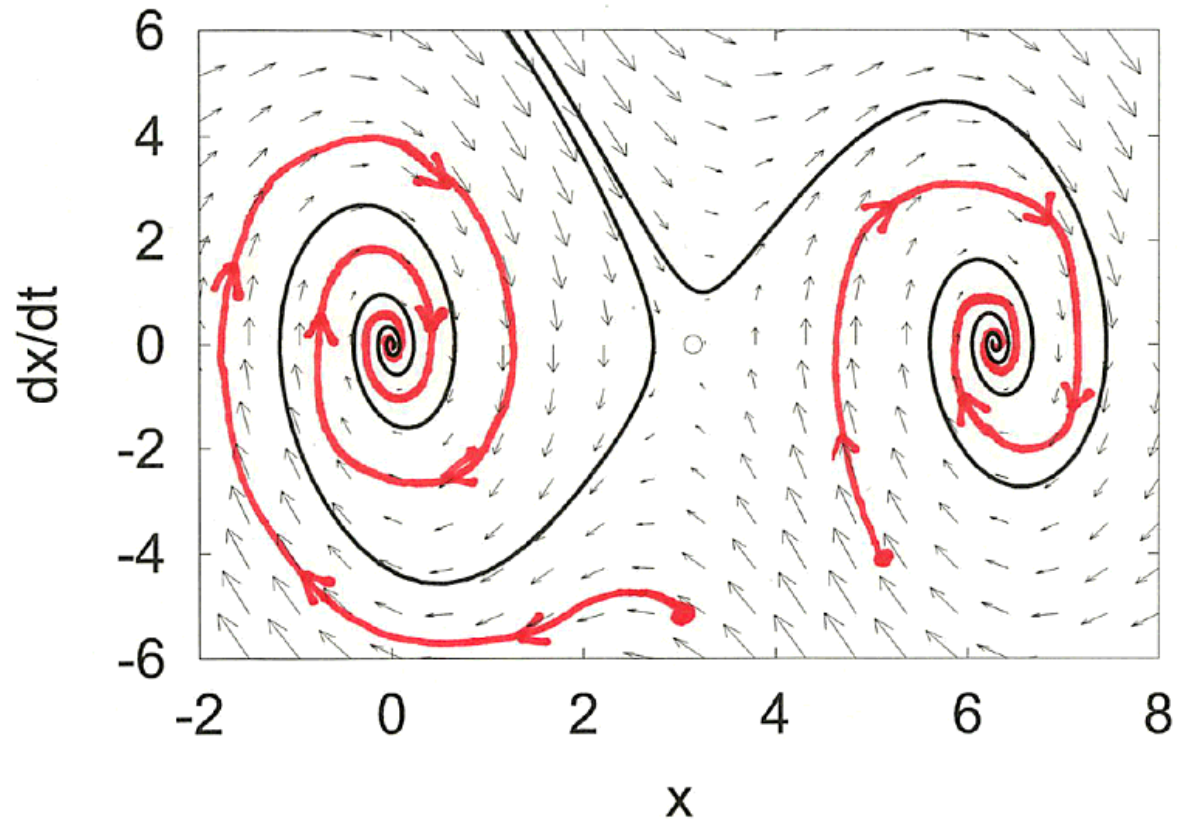
ベクトル場の特徴 1

相軌道は，ベクトル場の矢印をたどるように動く．

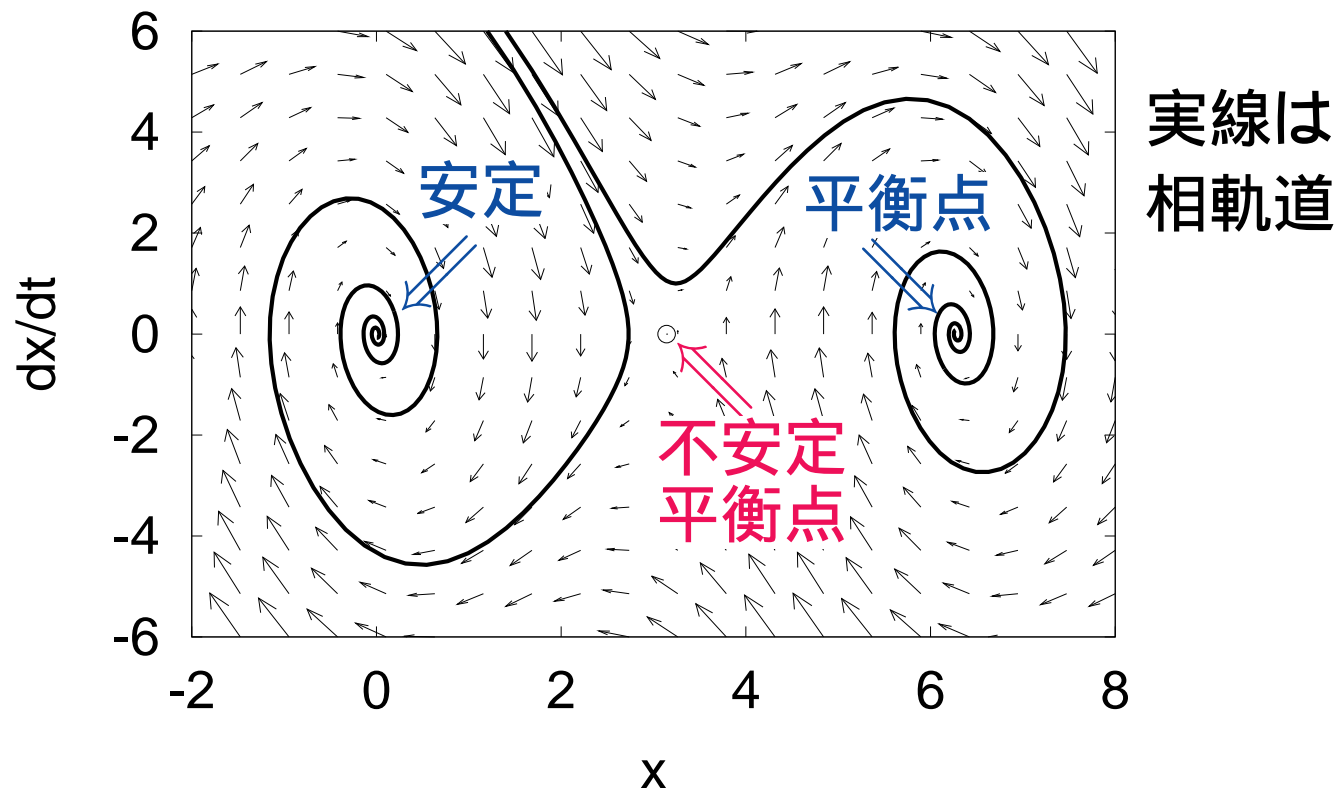
実習 2.1 ベクトル場の適当な場所にペン先を置き，矢印をたどりながら，そこを初期値とする相軌道を予想して描け．



解答例



単振り子の「ベクトル場」

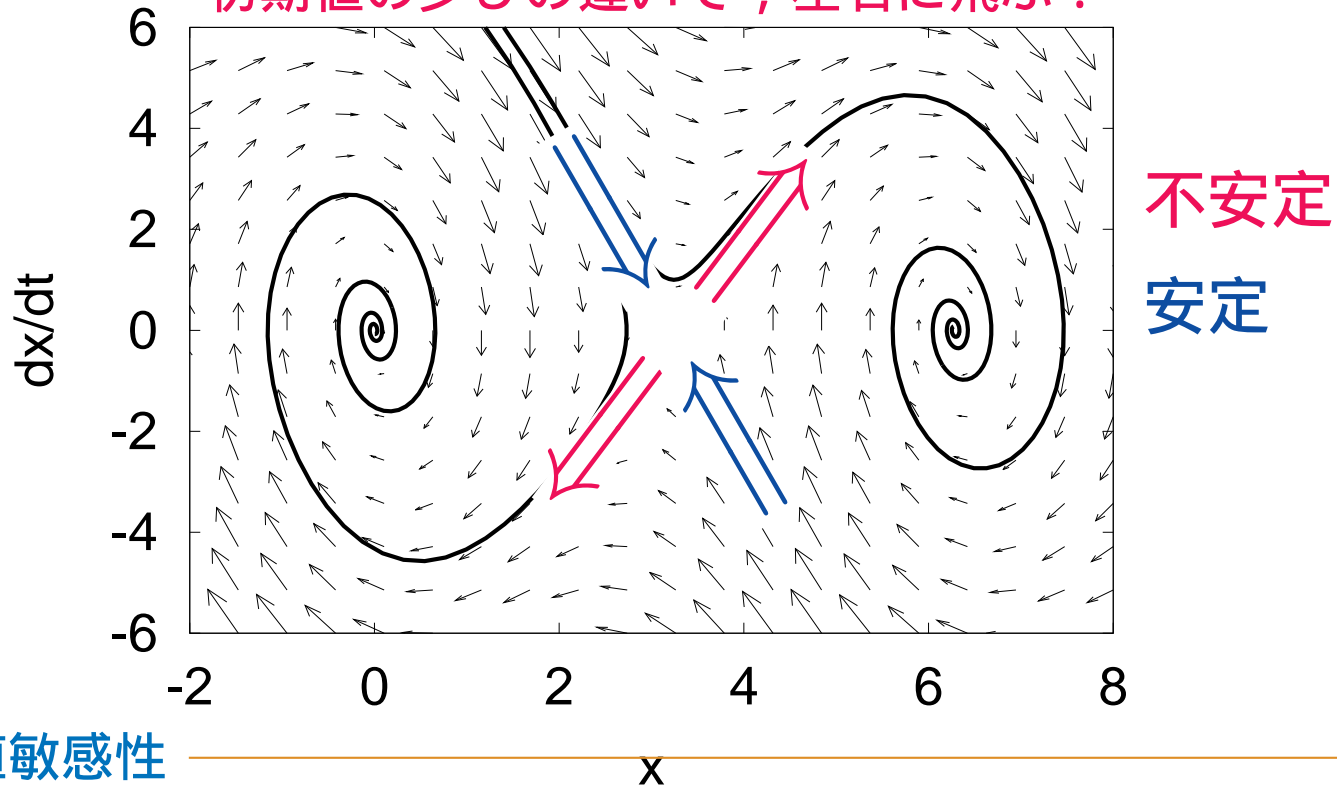


ベクトル場の特徴 2

- 内向きの「流れ」の中心に，安定平衡点がある．
- 外向きの「流れ」の中心に，不安定平衡点がある．

初期値敏感性と鞍点

初期値の少しの違いで，左右に飛ぶ！



初期値敏感性

- **鞍点** 定義 安定と不安定がクロスした平衡点のこと。(上死点)
- **鞍点**があると「初期値敏感性」が起る。

線形化とは？

似せること！

非線形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$



線形化方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

■ 線形化のメリット ⇔ 非線形のデメリット

- 平衡点の安定性 (渦巻, 鞍点, etc) を, 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の固有値から判別できる. (3~4章)
- 制御理論 (安定性の改変技術) の構築が簡単になる. (5~6章)

■ 線形化のデメリット

- 線形化は所詮「他人の空似」. 本人とは必ず食い違う.

単振り子の「線形化」 — (0, 0) まわり

よくある近似

x が小さければ, $\sin x \approx x$.

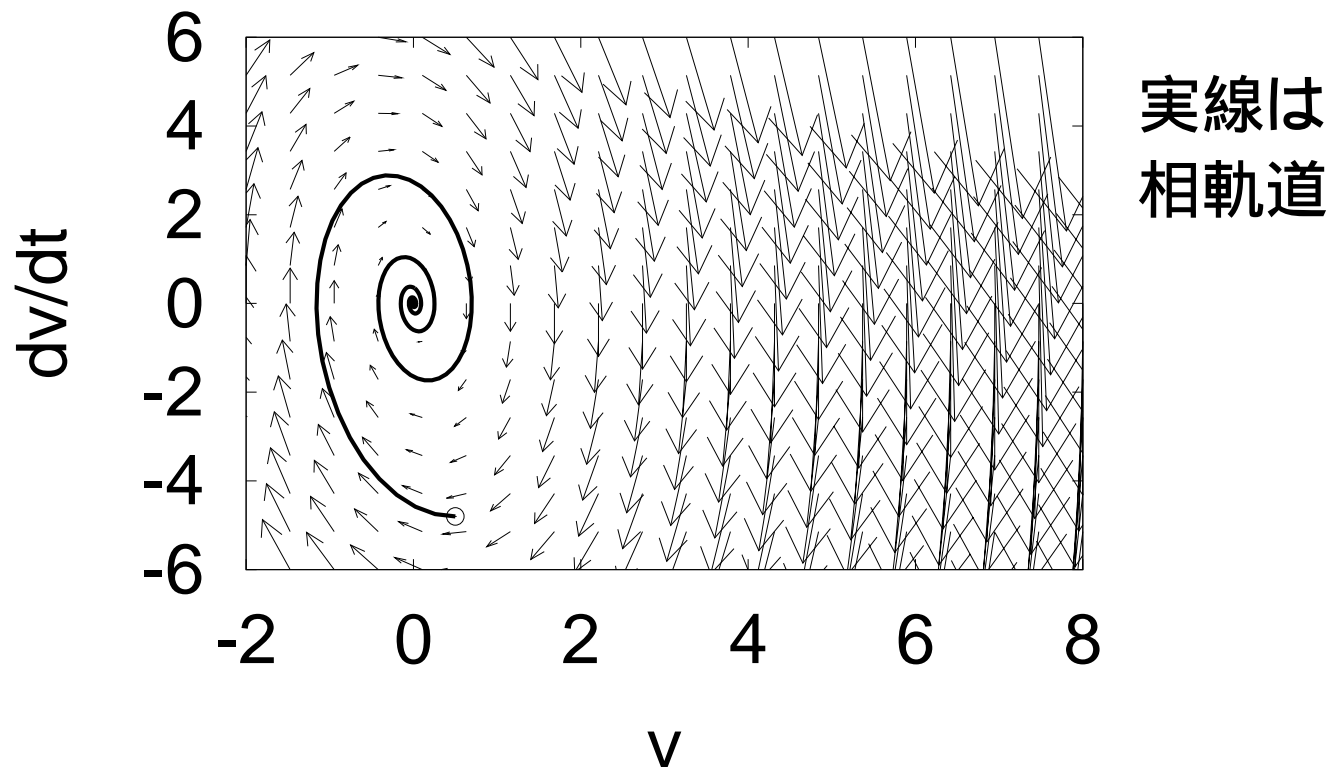
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k \sin x_1 - c x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ -k x_1 - c x_2 \end{bmatrix}$$

線形化 ↘ 方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

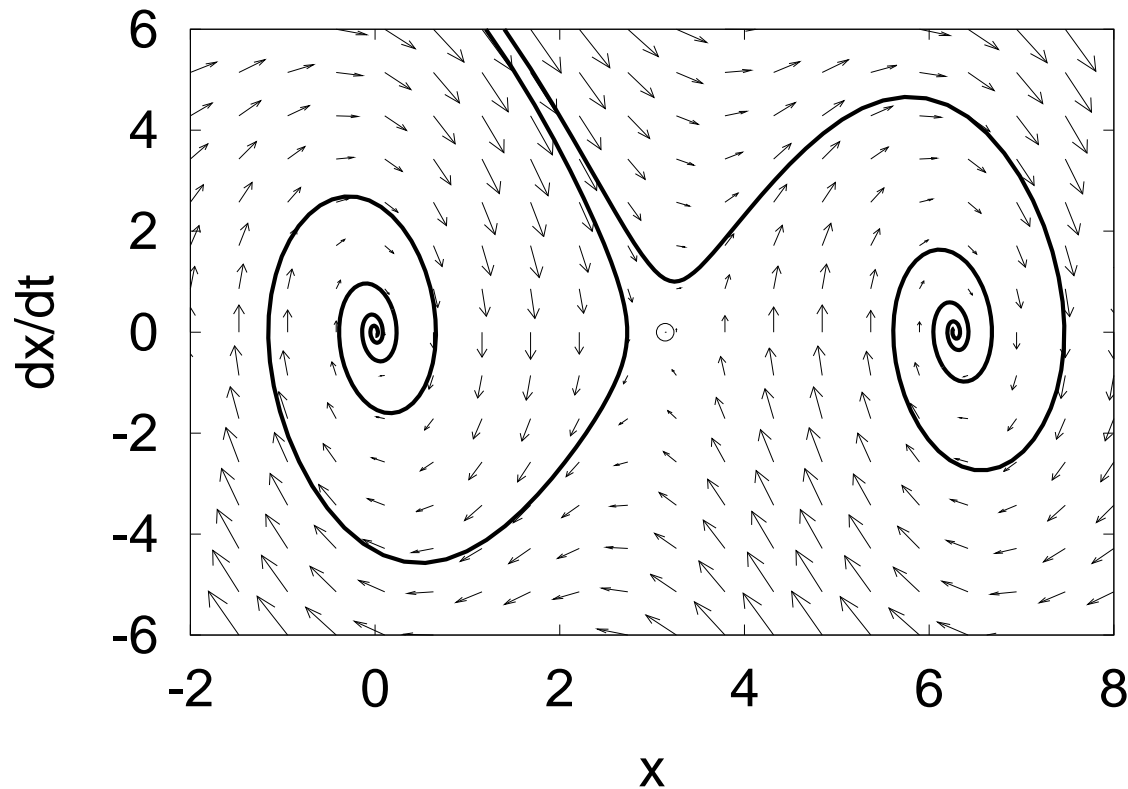
小さい x_i を
 v_i と書いた!

線形化ベクトル場 — $(0,0)$ まわり



- 安定平衡点 $(0,0)$ 近くでは，そっくり！
- **線形化の誤差**：中央部の「鞍点」と右の「渦巻」が消えた．

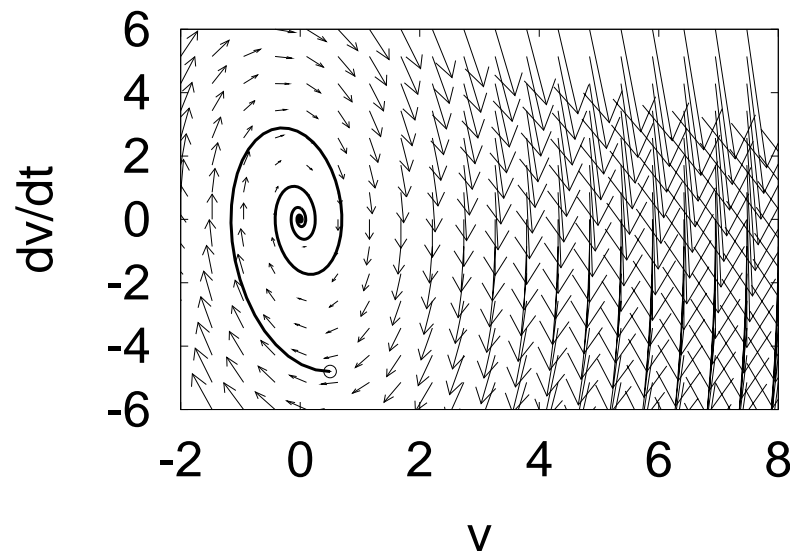
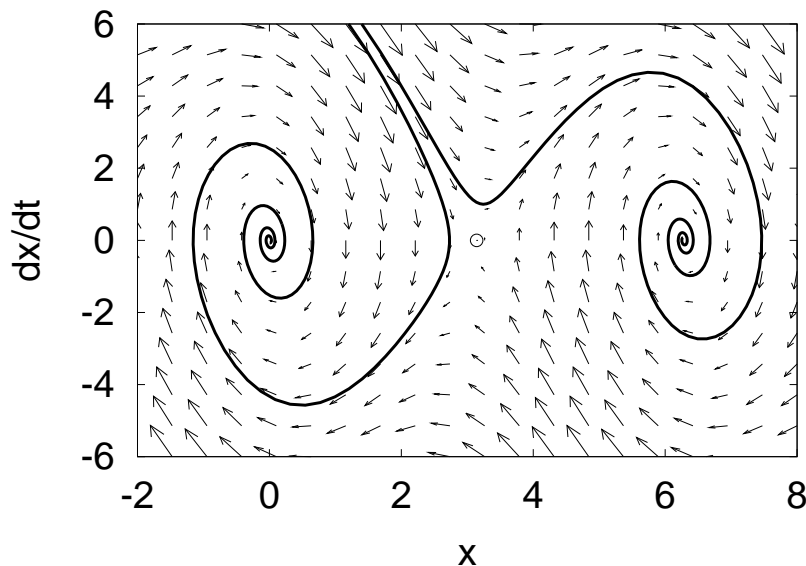
(単振り子の「ベクトル場」)



実線は
相軌道

線形化の限界

■ 線形化が信用できるのは，基準点の近くだけ！



別の基準点にバトンタッチ！

単振り子の「線形化」 — $(\pi, 0)$ まわり

原点の平行移動

$(\pi, 0)$ を原点とする状態量 $x' \equiv x - \bar{x} = (x_1 - \pi, x_2)$.

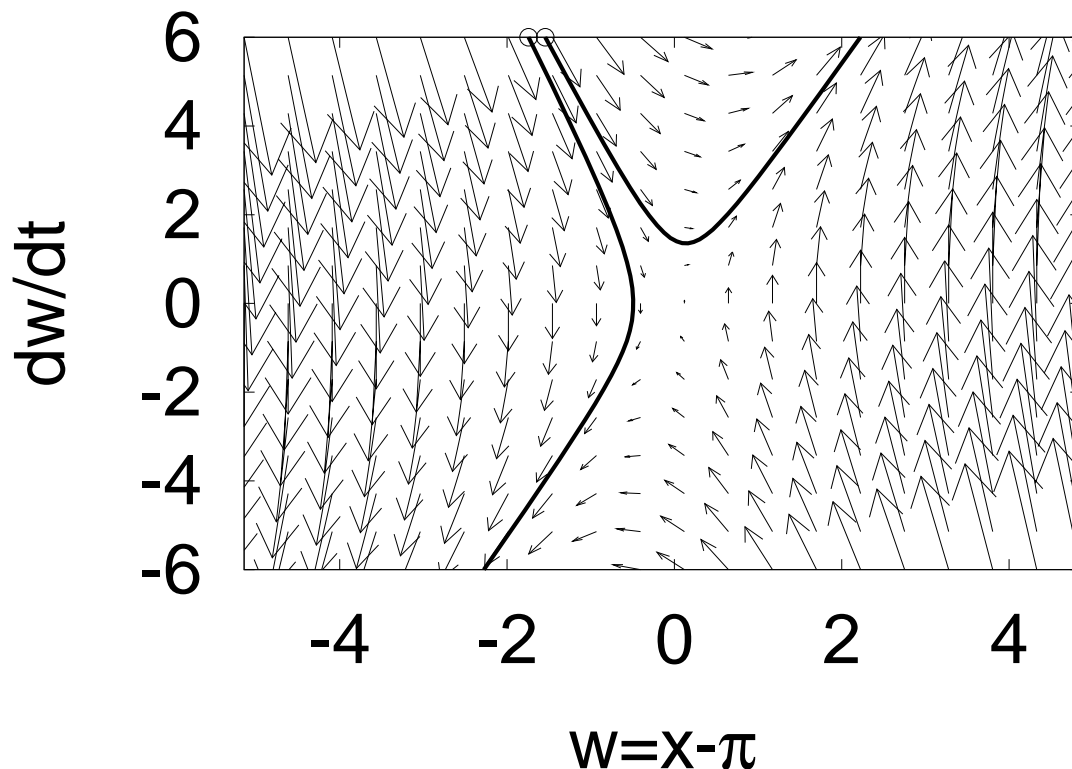
$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ -k \sin(x'_1 + \pi) - c x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ +k \sin x'_1 - c x'_2 \end{bmatrix}$$

線形化 \Downarrow 方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

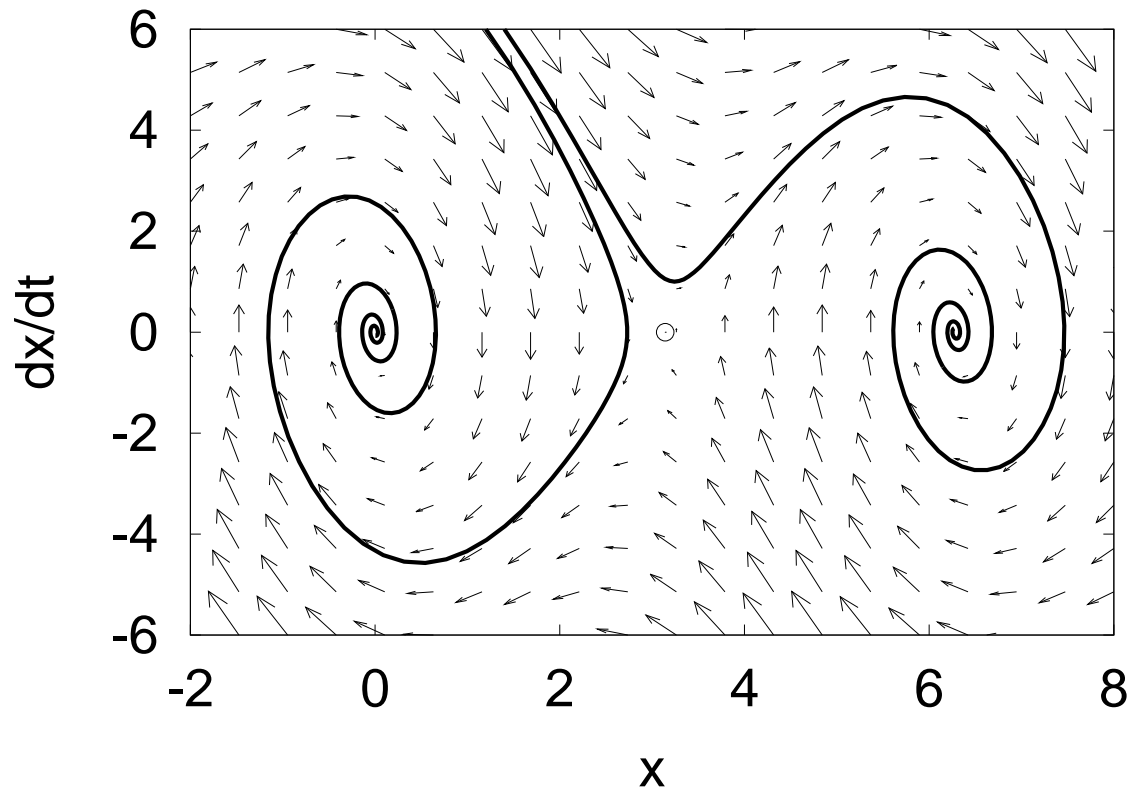
小さい x'_i を
 w_i と書いた!

線形化ベクトル場 — $(\pi, 0)$ まわり



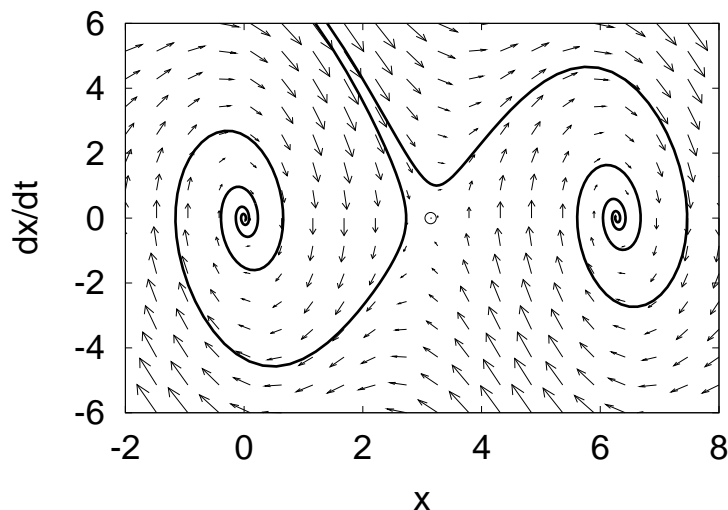
- 鞍点 $(\pi, 0)$ 近くでは, そっくり!
- **線形化の誤差**: 左右の「渦巻」が消えた.

(単振り子の「ベクトル場」)

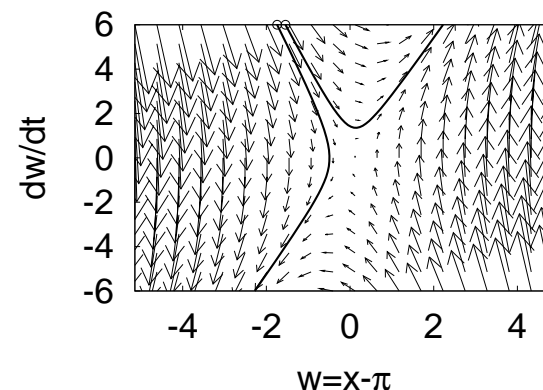
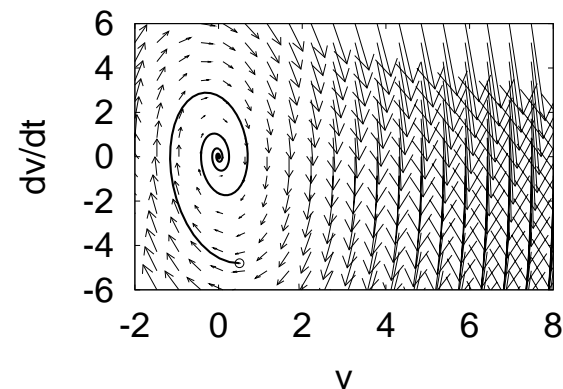


実線は
相軌道

線形化のまとめ



線形化 \rightarrow



線形化の教訓

- 線形化方程式は，平衡点の数だけ存在する．
- 線形化方程式は，対応する平衡点の近くでしか，信用できない．


第3回 動的システム入門

行列指数関数

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- 線形の状態方程式 $\dot{x} = Ax$ の解を数式表現する。
 - 指数関数を作る。
 - 同じ方法で，行列指数関数を作る。
 - 解 $x(t)$ を表示する。  $x(t) = e^{At}x_0$
- 相軌道を $x(t) = e^{At}x_0$ で描き，前回までと比較する。
- 推移行列を使って行列指数関数の値を求める。

初期値問題 (1 次元)

定義

$$\dot{x} = ax, \quad x(0) = c \quad (\text{定数})$$

↓ 解法

ピカールの逐次近似法

次の公式に，関数列 $x_n(t)$ を繰り返し代入する．

$$x_{n+1}(t) = c + \int_0^t ax_n(\tau)d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

得られた関数列 $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$ の極限が解 $x(t)$ となる．

逐次近似法の計算例 (1次元)

■ $x_0 = c$ (定数関数) を初項とする .

$$\text{■ } x_1(t) = c + \int_0^t ac \, d\tau = c + act$$

$$\text{■ } x_2(t) = c + \int_0^t a(c + ac\tau) \, d\tau = c + act + a^2c \frac{t^2}{2}$$

$$\text{■ } x_3(t) = c + \int_0^t a \left(c + ac\tau + a^2c \frac{\tau^2}{2} \right) \, d\tau = c + act + a^2c \frac{t^2}{2} + a^3c \frac{t^3}{3 \cdot 2}$$

実習 3.1 $x_4(t)$ を求めよ .

無限級数解 (1 次元)

$$\blacksquare x_4(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} \right) c //$$

極限 $\Downarrow n \rightarrow \infty$

無限級数解 (1 次元)

$$x_\infty(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots \right) c$$

■ 初期値の検算：

$$x_\infty(0) = \left(1 + a0 + \frac{(a0)^2}{2!} + \frac{(a0)^3}{3!} + \frac{(a0)^4}{4!} + \dots \right) c = c //$$

■ 解であることの検算：

$$\begin{aligned}\dot{x}_\infty(t) &= \left(0 + a + a^2t + a\frac{a^3t^2}{2!} + \frac{a^4t^3}{3!} + \frac{a^5t^4}{4!} + \dots \right) c \\ &= a \underbrace{\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots \right)}_{\text{終わりが無いから } x_\infty(t) \text{ と区別できない}} c = ax_\infty(t) //\end{aligned}$$

∴ 無限級数 $x_\infty(t)$ は初期値問題 $\dot{x} = ax, x(0) = c$ の解！

指数関数の導入と活用

無限級数解

$$x_{\infty}(t) = \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots \right) c$$

級数部分を ↓ 抜き出す

指数関数の定義

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

↓ 解の表示

1次元状態方程式の解

初期値問題 $\dot{x} = ax, x(0) = c$ の解は $x(t) = e^{at}c$ と書ける。

ベクトルの積分

定義 (全成分を同じ積分にさらすこと)

$$\int \mathbf{x}(\tau) d\tau \equiv \begin{bmatrix} \int x_1(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int x_n(\tau) d\tau \end{bmatrix} \xrightleftharpoons[\text{表記}]{\text{短縮}} \int [x_i(\tau)] d\tau \equiv \left[\int x_i(\tau) d\tau \right]$$

例題 ベクトル $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}$ の積分 $\int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau$ を求めよ。

解答例

$$\int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \tau^2 \\ e^\tau \end{bmatrix} d\tau \equiv \begin{bmatrix} \int_0^t \tau^2 d\tau \\ \int_0^t e^\tau d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3/3 \\ e^t - 1 \end{bmatrix} //$$

初期値問題 (n 次元)

定義

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c} \quad (\text{定ベクトル})$$

↓ 解法

ピカールの逐次近似法

次の公式に，ベクトル値関数列 $\boldsymbol{x}_n(t)$ を繰り返し代入する．

$$\boldsymbol{x}_{n+1}(t) = \boldsymbol{c} + \int_0^t A\boldsymbol{x}_n(\tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

得られた関数列 $\boldsymbol{x}_0(t), \boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots$ の極限が解 $\boldsymbol{x}(t)$ となる．

逐次近似法の計算例 (n 次元)

■ $x_0 = \mathbf{c}$ (定ベクトル値関数) を初項とする .

$$\text{■ } x_1(t) = \mathbf{c} + \int_0^t A\mathbf{c} d\tau = \mathbf{c} + tA\mathbf{c}$$

$$\text{■ } x_2(t) = \mathbf{c} + \int_0^t A(\mathbf{c} + \tau A\mathbf{c}) d\tau = \mathbf{c} + tA\mathbf{c} + \frac{t^2}{2}A^2\mathbf{c}$$

$$\text{■ } x_3(t) = \mathbf{c} + \int_0^t A\left(\mathbf{c} + \tau A\mathbf{c} + \frac{\tau^2}{2}A^2\mathbf{c}\right) d\tau = \mathbf{c} + tA\mathbf{c} + \frac{t^2}{2}A^2\mathbf{c} + \frac{t^3}{3 \cdot 2}A^3\mathbf{c}$$

実習 3.2 $x_4(t)$ を求めよ .

無限級数解 (n 次元)

■ $x_4(t) = \left(E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} \right) \mathbf{c}$ (E は単位行列) //

極限 $\Downarrow n \rightarrow \infty$

無限級数解 (n 次元)

$$x_{\infty}(t) = \left(E + (tA) + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \dots \right) \mathbf{c}$$

■ 初期値の検算：

$$x_{\infty}(0) = \left(E + 0A + \frac{(0A)^2}{2!} + \frac{(0A)^3}{3!} + \frac{(0A)^4}{4!} + \dots \right) \mathbf{c} = \mathbf{c} //$$

■ 解であることの検算：

$$\begin{aligned}\dot{x}_\infty(t) &= \left(O + A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2!} + \frac{t^3 A^4}{3!} + \frac{t^4 A^5}{4!} + \dots \right) c \\ &= A \underbrace{\left(E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \dots \right)}_{\text{終わりが無いから } x_\infty(t) \text{ と区別できない}} c = Ax_\infty(t) //\end{aligned}$$

∴ 無限級数 $x_\infty(t)$ は初期値問題 $\dot{x} = Ax, x(0) = c$ の解！

行列指数関数の導入と活用

無限級数解 (n 次元)

$$\boldsymbol{x}_\infty(t) = \left(E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \frac{(tA)^4}{4!} + \dots \right) \boldsymbol{c}$$

級数部分を \Downarrow 抜き出す

行列指数関数の定義

$$e^X \equiv E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \dots \quad (X \text{ は行列})$$

解の表示 \Downarrow 制御工学の表記: $At \equiv tA$

n 次元状態方程式の解

初期値問題 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ の解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{c}$ と書ける。

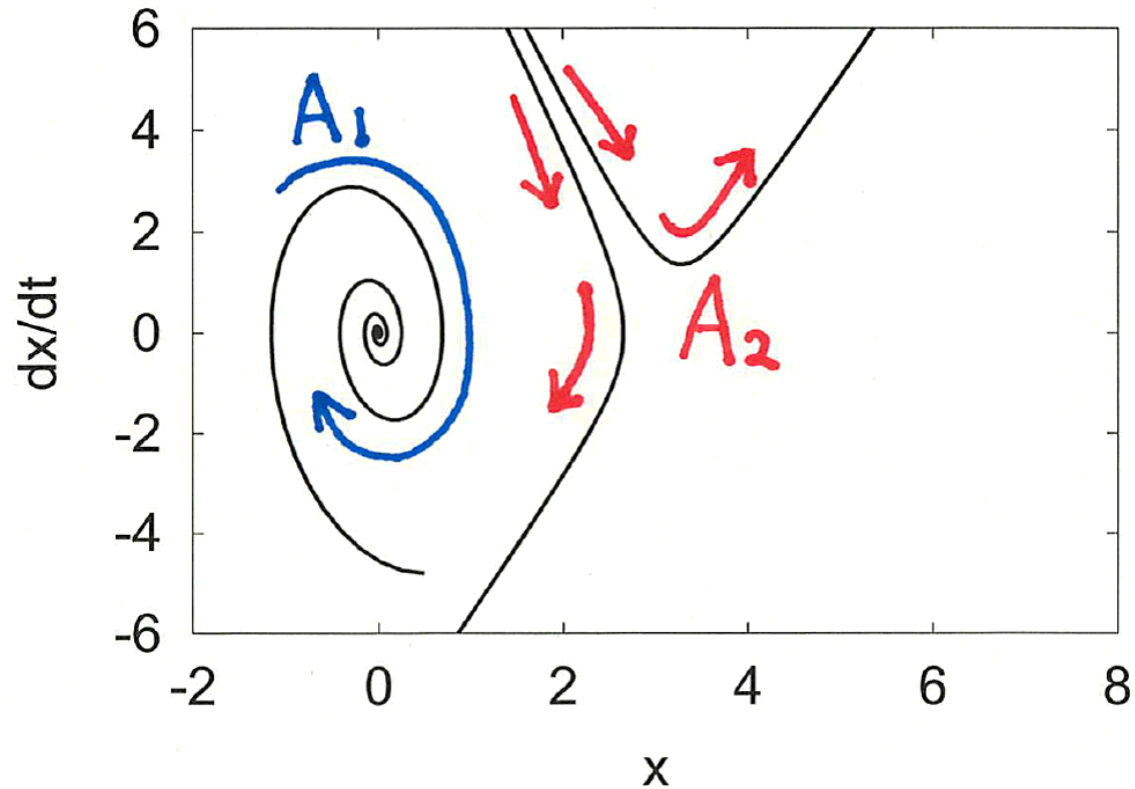
実習 3.3 状態方程式 $\dot{x} = Ax$ の軌道 $x(t) = e^{At}x(0)$ を，次の行列について求めよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & -1 \end{bmatrix}$$

初期値を前回の線形化ベクトル場と合せると，同じ軌道が得られる．

解答例

Code 5 を実行すると，前回の線形化ベクトル場と同じ軌道が得られる．



推移行列

■ 時間原点のシフト :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= e^{At} \boldsymbol{x}(0) = e^{A(t-t_0+t_0)} \boldsymbol{x}(0) = e^{A(t-t_0)} e^{At_0} \boldsymbol{x}(0) \\ &= \underbrace{e^{A(t-t_0)}}_{\Phi(t, t_0)} \boldsymbol{x}(t_0) \end{aligned}$$

推移行列

時刻 t_0 から t までの , 相軌道の変位を表す行列 $\Phi(t, t_0) \equiv e^{A(t-t_0)}$

推移行列の性質

推移行列は状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ と同じ形の方程式を満足する .

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \quad (t_0 \text{ は定数})$$

行列指数関数の数値解法

■ 推移行列の性質より，行列微分方程式，

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad \Phi(0) = E \quad (\text{単位行列})$$

の $t = 1$ における解 $\Phi(1)$ は， e^A と一致する．

実習 3.4 Code 6 を実行せよ．行列微分方程式による数値解と，組み込みの行列指数関数が比較できる．

解答例

次のような結果が得られる．確かに一致している．

```
octave:1> source "expAt2.m"
```

```
Xmat =
```

```
  -0.600702    0.010061  
  -0.098601   -0.610764
```

```
ans =
```

```
  -0.600702    0.010061  
  -0.098601   -0.610764
```

第4回 動的システム入門

安定判別

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- 固有値・固有ベクトル
 - 行列の固有値が求められる。
 - 行列指数関数 (行列) の固有値が求められる。
- 状態方程式の固有値を見て，判定判別ができる。
 - 実固有値の場合。
 - 複素固有値の場合。
 - 多次元の場合。

固有値・固有ベクトル

定義

行列 A に関する等式，

$$Av = sv \quad (v \neq 0)$$

において，係数 s を固有値，ベクトル v を固有ベクトルという．

■ 固有値の求め方

1. 固有方程式 $|A - sI| = 0$ を解き，固有値 s_1, \dots, s_n を求める．
2. 各 $s = s_i$ を $Av = sv$ に代入し，固有ベクトル $v_i \neq 0$ の方向を求める．

固有ベクトル v_i の長さは定まらないので勝手に決めてよい．

例題 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ。

解答例

$$\blacksquare \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0-s & 1 \\ -2 & -3-s \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = 0$$

\therefore 固有値は $s = -1, -2 //$

■ 1 つ目の固有値 $s = s_1 = -1$ を $A\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}$ に代入すると,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies v_1 + v_2 = 0$$

\therefore 固有ベクトルの方向は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} //$

■ 2 つ目の固有値 $s = s_2 = -2$ を $A\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}$ に代入すると,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -2v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies 2v_1 + v_2 = 0$$

\therefore 固有ベクトルの方向は $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} //$

固有ベクトルが作る基底

本講義の仮定

講義に出てくる行列 A の固有値は重複しない。

↓ このとき

定理

固有ベクトルの組 $\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ は, n 次元空間の基底となる。

$\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ が基底とは？

1. どんなベクトル x も, $x = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ と書ける。
2. その係数 a_1, \dots, a_n の定まり方が, 各 x につき一通り。

行列指数関数の固有値

算法 4.2

行列 A の固有値が s のとき，行列 e^A の固有値は e^s となる．固有ベクトル v は共通．すなわち，

$$\begin{array}{ccc} A & v = & s & v & \implies & e^A & v = & e^s & v \\ \text{行列} & & \text{固有値} & & & \text{行列} & & \text{固有値} & \end{array}$$

A の定数倍 At についても同様に， $e^{At}v = e^{st}v$ となる．

これを使うと，状態方程式の「安定判別」が簡単にできる！

解のモード展開

$\dot{x} = Ax$ の解

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

簡単のため 2 次元で考える。

- A の固有値 s_1, s_2 , 固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ をとる。
- 初期値を固有ベクトルで $\mathbf{c} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ と表す $\therefore \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ は基底
- 解に代入し, 行列指数関数 e^{At} を, **算法 4.2** で消去する。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{c} = e^{At}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1(e^{At}\mathbf{v}_1) + c_2(e^{At}\mathbf{v}_2) \\ &= c_1(e^{s_1t}\mathbf{v}_1) + c_2(e^{s_2t}\mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

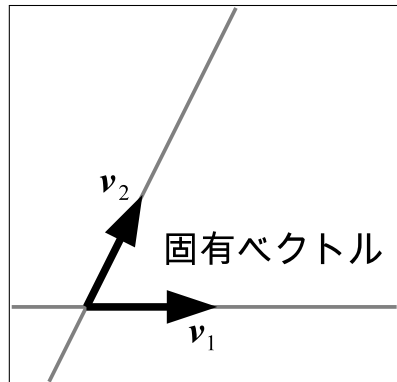
- $\therefore \mathbf{x}(t) = c_1e^{s_1t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{s_2t}\mathbf{v}_2 //$  「モード展開」という。

実固有値の安定性

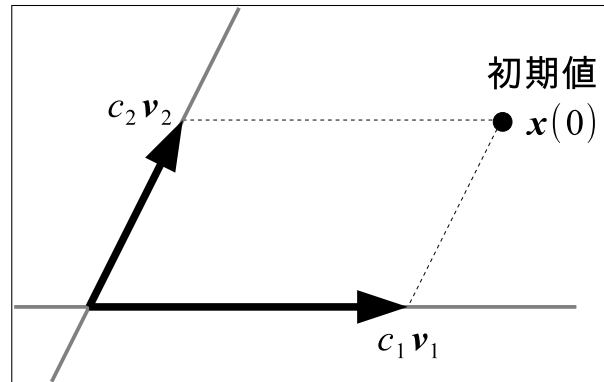
$\dot{x} = Ax$ の解のモード展開

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} v_1 + c_2 e^{s_2 t} v_2$$

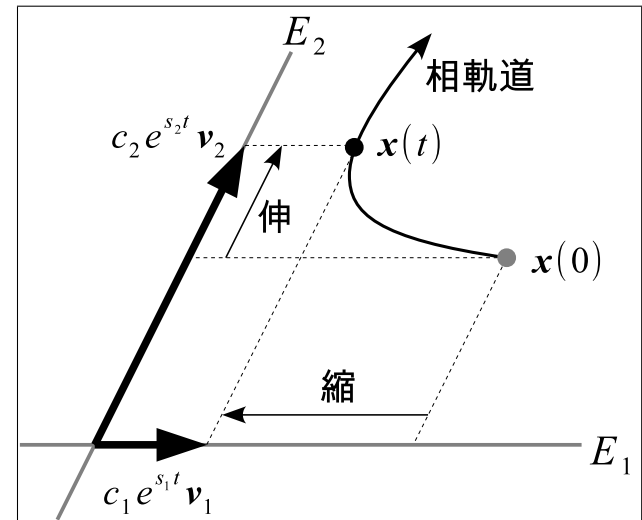
∴ 時間変動は指数関数 $e^{s_i t}$ だけ！



(a) 固有ベクトル



(b) 初期値



(c) E_1, E_2 方向の伸縮

指数関数の増減

● $s < 0 \implies e^{st} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ 収束, 安定

● $s > 0 \implies e^{st} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$ 発散, 不安定

表 4.1 安定判別 (実固有値, 2 次元)

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \underline{e^{s_1 t}} \boldsymbol{v}_1 + c_2 \underline{e^{s_2 t}} \boldsymbol{v}_2$$

s_1 s_2

固有値の符号	解挙動 ($t \rightarrow \infty$)	分類名
$s_1, s_2 < 0$	$\boldsymbol{x}(t) \rightarrow 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$	安定結節点
$0 < s_1, s_2$	$\boldsymbol{x}(t) \rightarrow \infty\boldsymbol{v}_1 + \infty\boldsymbol{v}_2 = \infty$	不安定結節点
$s_1 < 0 < s_2$	$\boldsymbol{x}(t) \rightarrow 0\boldsymbol{v}_1 + \infty\boldsymbol{v}_2 = \infty$	鞍点

実習 4.1 実習 3.3 の行列 $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を求め, 上の表で分類せよ.

解答例

Octave で固有値を求めると，

```
octave:1> A2=[0,1;9.8,-1]
```

```
A2 =
```

```
  0.00000  1.00000
```

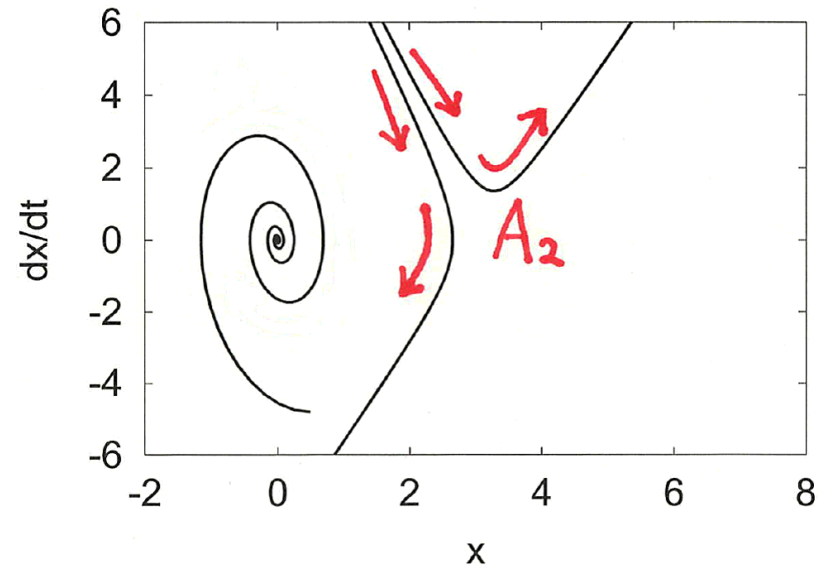
```
  9.80000 -1.00000
```

```
octave:2> eig(A2)
```

```
ans =
```

```
  2.6702
```

```
 -3.6702
```



より， $-3.6702 < 0 < 2.6702$ なので，鞍点に判別される．実習 4 の実行例でも，中央に向いながら左右に飛される鞍点特有の軌道が見てとれる．

複素共役と実数化

1. 複素数 $z = a + ib$ と共役 $\bar{z} = a - ib$. ($i = \sqrt{-1}$)
2. 複素ベクトル $z = a + ib$ と共役 $\bar{z} = a - ib$.
3. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と共役 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
指数関数の共役 $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
4. 積の共役 $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$, スカラ倍の共役 $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$.
5. 実部 $\operatorname{Re}\{a + ib\} = a$. 虚部 $\operatorname{Im}\{a + ib\} = b$.

実数化

6. 共役の和は実数 (ベクトル) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}\{z\}$.

複素固有値の解

$\dot{x} = Ax$ の解

$$x(t) = c_1 \underline{e^{s_1 t}} v_1 + c_2 \underline{e^{s_2 t}} v_2$$

定理

実行列の複素固有値は，必ず，共役の対で表れる．

■ A の固有値を，複素共役 $s_1 = s, s_2 = \bar{s}$ とする． (s は複素数)

⇒ 固有ベクトルも複素共役 $v_1 = v, v_2 = \bar{v}$ ． (v は複素ベクトル)

⇒ 初期値の係数も複素共役 $c_1 = c, c_2 = \bar{c}$ ． (c は複素数)

$$\text{■ } x(t) = c e^{st} v + \bar{c} \overline{e^{s_2 t} v} = c e^{st} v + \overline{c e^{st} v} = 2 \operatorname{Re}\{c e^{st} v\}$$

■ $c = a + ib, s = \gamma + i\omega, v = u + iw$ として計算すると，

$$x(t) = 2 \operatorname{Re}\{c e^{st} v\} = 2e^{\gamma t} \{ \cos \omega t (au - bw) - \sin \omega t (aw + bu) \} //$$

歪んだ楕円軌道

複素固有値 $\gamma \pm i\omega$ の解

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t} \{ \cos \omega t \boldsymbol{U}_1 + \sin \omega t \boldsymbol{U}_2 \}$$

ただし, $\boldsymbol{U}_1 = 2(au - bw)$, $\boldsymbol{U}_2 = -2(aw + bu)$ は定ベクトル



$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t} \{ \cos \omega t \boldsymbol{U}_1 + \sin \omega t \boldsymbol{U}_2 \}$$

歪んだ楕円軌道

■ 複素固有値の解は,

- 歪んだ楕円軌道を描く。角振動数は ω (固有値の虚部)。
- その振幅が指数関数的に**増大** ($\gamma > 0$) or **縮小** ($\gamma < 0$) する。

表 4.2 安定判別 (複素固有値 $\gamma \pm i\omega$, 2次元)

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\gamma t} \{ \cos \omega t \boldsymbol{U}_1 + \sin \omega t \boldsymbol{U}_2 \}$$

$\gamma \downarrow \omega$

固有値実部の符号	分類名
$\gamma < 0$	安定渦状点
$\gamma > 0$	不安定渦状点
$\gamma = 0$	渦心点 単振動

固有値虚部 ω は , 楕円軌道 $U(\omega t)$ の角振動数

実習 4.2 実習 3.3 の行列 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値を求め , 上の表で分類せよ .

解答例

Octave で固有値を求めると ,

```
octave:1> A1=[0,1;-9.8,-1]
```

```
A1 =
```

```
  0.00000  1.00000
```

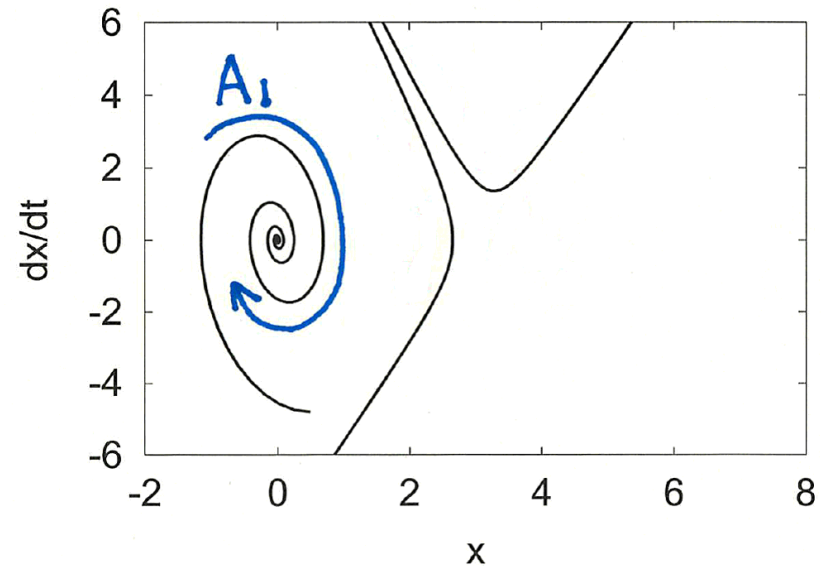
```
 -9.80000 -1.00000
```

```
octave:2> eig(A1)
```

```
ans =
```

```
 -0.5000 + 3.0903i
```

```
 -0.5000 - 3.0903i
```



より , 複素固有値で実部が負なので , 安定渦状点に判別される . 実習 4 の実行例でも , 原点に収束する渦巻が見てとれる . この渦巻運動の角振動数は ≈ 3.0903 である .

多次元の場合

n 次元のモード展開

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{s_1 t} \boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{s_2 t} \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n e^{s_n t} \boldsymbol{v}_n$$

↓ 複素固有値があれば

共役なペアが実数化 (楕円軌道)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \cdots + c_k e^{s_k t} \boldsymbol{v}_k + \overline{c_k e^{s_k t} \boldsymbol{v}_k} + \cdots \\ &= \cdots + e^{\gamma_k t} \{ \text{楕円軌道} \} + \cdots \end{aligned}$$

それだけ！

多次元の安定判別

■ 固有値の実部が , 1 つでも > 0 \Rightarrow 発散 , 不安定 !

$$\therefore \boldsymbol{x}(t) = \cdots + c_k e^{(\text{正})t} \boldsymbol{v}_k + \cdots$$

$$\text{or } \boldsymbol{x}(t) = \cdots + e^{(\text{正})t} \{ \text{楕円軌道} \} + \cdots$$

■ 固有値の虚部が , 1 つでも $\neq 0$ \Rightarrow 楕円軌道

\Rightarrow 振動 , オーバーシュート !

オーバーシュート

目標地点を , いったん行き過ぎてしまうこと . クレーンに吊り下げられた , 荷物の動き .

第5回 動的システム入門

対角正準形

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

■ 直交成分と斜交成分

- ベクトルの成分とは「寸法」である。寸法の測り方で成分は変化する。

■ 基底変換行列

- 直交成分と斜交成分の関係式を導く。

■ 線形変換の対角化

- 線形変換を対角行列で表す。

■ 状態方程式の対角化

- 状態方程式を対角行列で表す。

列ベクトル

定義

行列 A の各列のこと．すなわち，

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{v_1} \\ \boxed{u_2} & \boxed{v_2} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

の \mathbf{u}, \mathbf{v} を列ベクトルという．

便利な式変形

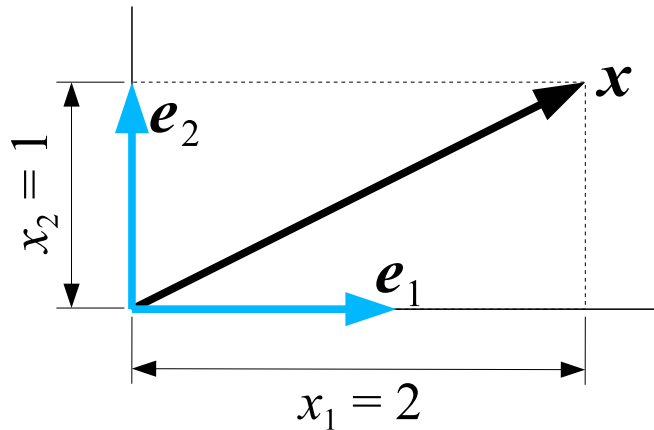
$$x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 u_1 + x_2 v_1 \\ x_1 u_2 + x_2 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ベクトル x の直交成分

定義

ベクトル x の「縦」「横」の寸法 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を、直交成分という。

■ 例：



$$\Rightarrow \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} //$$

直交成分の特殊性

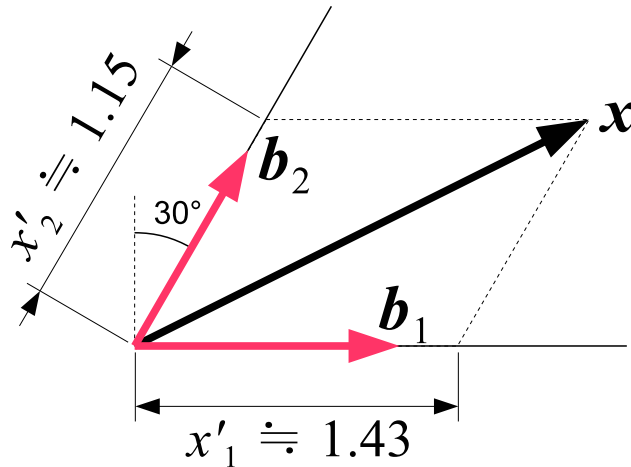
$\tilde{x} = x$ (ベクトルの直交成分はベクトルそのものの)

ベクトル x の斜交成分

定義

ベクトル x を対角線とする平行四辺形の寸法 $\tilde{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ を、斜交成分という。

■ 例：



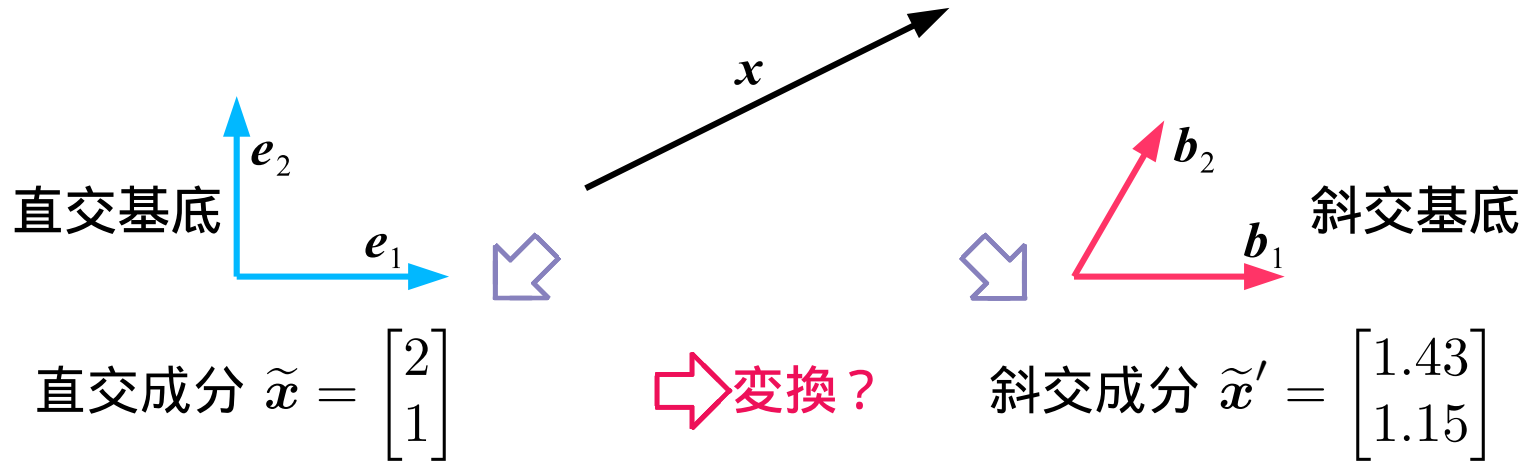
$$\Rightarrow \tilde{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix} //$$

ベクトル x が同じでも

(直交成分) $\tilde{x} = x \neq \tilde{x}'$ (斜交成分) $\neq \tilde{x}''$ (別の斜交成分)

基底変換行列

目標



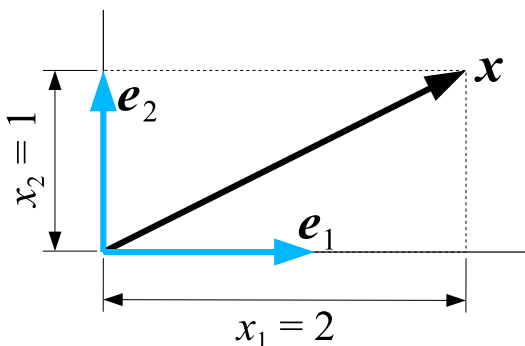
$$\tilde{x} = x = x'_1 b_1 + x'_2 b_2 = [b_1, b_2] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \equiv T \tilde{x}'$$

直交成分と斜交成分の関係

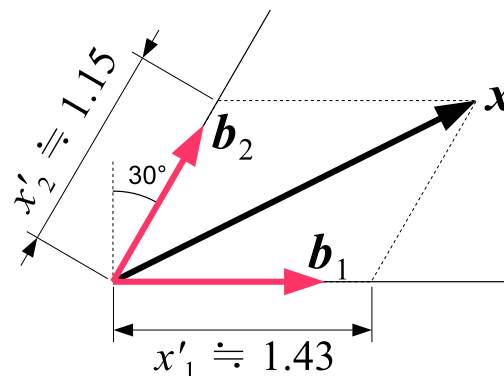
$$\tilde{x} = T \tilde{x}' \quad \text{または} \quad \tilde{x}' = T^{-1} \tilde{x} \quad (\tilde{x} = x)$$

$T = [b_1, b_2]$ を基底変換行列という. n 次元なら $T = [b_1, \dots, b_n]$.

例題 斜交成分 $\tilde{x}' = T^{-1}\tilde{x}$, $T = [b_1, b_2]$ を計算し, 右図の実測値と比較せよ. ただし, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ である.



$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

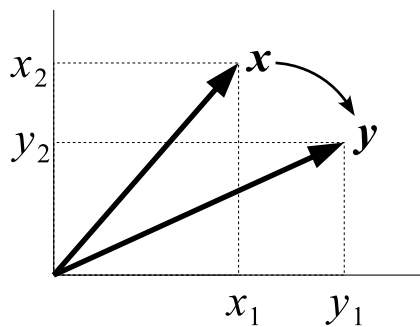
解答例

基底変換行列 $T = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = T^{-1}\mathbf{x} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.16 \end{bmatrix} \approx \text{実測値} \begin{bmatrix} 1.43 \\ 1.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

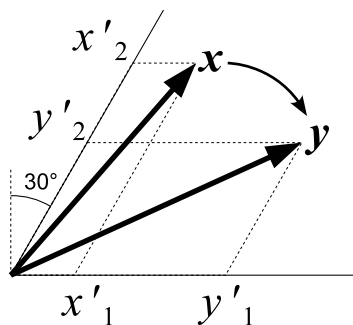
となる．実測値のほうに測定誤差がある．

線形変換と行列



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{直交成分の変換}$$

同じ変換 $x \mapsto y$ でも，成分のとり方で行列は変わる



$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad \text{斜交成分の変換}$$

相似な行列

同じ変換を表す A と A' を「相似」という。

A と A' の関係

- 直交成分 \tilde{x}, \tilde{y} と斜交成分 \tilde{x}', \tilde{y}' の関係 :

$$\tilde{x} = T\tilde{x}', \quad \tilde{y} = T\tilde{y}', \quad T = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$$

- 線形変換 $\tilde{y} = A\tilde{x}$ へ代入すると ,

$$T\tilde{y}' = \tilde{y} = A\tilde{x} = AT\tilde{x}' \quad \therefore \tilde{y}' = \overbrace{T^{-1}AT}^{A'} \tilde{x}'$$

補足

線形変換 $y = Ax$ の作用 (動き) は , 斜交成分では ,

$$\tilde{y}' = A' \tilde{x}', \quad A' \equiv T^{-1}AT$$

と表せる . T は基底変換行列である .

線形変換 $y = Ax$ の対角化 (2次元)

- 斜交基底 $B = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ を, 行列 A の固有ベクトルにとる.

$$A\mathbf{b}_i = s_i\mathbf{b}_i$$

- このとき, 線形変換 $y = Ax$ の斜交成分表示 $\tilde{y}' = A'\tilde{x}'$ は,

$$\begin{aligned} A' &= T^{-1}AT = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]^{-1}A[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]^{-1}[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2] \\ &= [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]^{-1}[s_1\mathbf{b}_1, s_2\mathbf{b}_2] \quad \because \text{固有ベクトル} \\ &= \underbrace{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]^{-1}[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]}_{\text{単位行列 } I} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad \because \text{便利な式変形} \\ &= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad \because A' = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} // \begin{matrix} \text{短縮} \\ \text{=} \\ \text{表記} \end{matrix} \text{diag} \{s_1, s_2\} \end{aligned}$$

線形変換 $y = Ax$ の対角化 (n 次元)

定理

行列 A の固有ベクトルで斜交基底を構成すると, A の斜交成分表示は, 固有値を並べた対角行列になる.

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} s_1 & & \mathbf{0} \\ & \cdots & \\ \mathbf{0} & & s_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{短縮} \\ \text{=} \\ \text{表記} \end{array} \quad \text{diag} \{s_1, \dots, s_n\}$$

例題 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ を対角化せよ.

解答例

第3回の例題で求めた固有ベクトル v_1, v_2 より, 基底変換行列を $T = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} A' = T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} // \end{aligned}$$

確かに, 固有値 $s = -1, -2$ を並べた対角行列が得られる.

状態方程式の対角化

- n 次元状態方程式 $\dot{x} = Ax$
- A の固有ベクトル $Av_k = s_k v_k$
- 基底 $\mathcal{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ による斜交成分 $x = Ty$
- その時間微分 $\dot{x} = T\dot{y}$
- 斜交成分で表した状態方程式

$$T\dot{y} = \dot{x} = Ax = ATy \quad \therefore \dot{y} = \overbrace{T^{-1}AT}^{\text{対角行列}} y //$$

対角正準形

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} y, \quad y = T^{-1}x, \quad T = \overbrace{[v_1, \dots, v_n]}^{\text{固有ベクトル}}$$

モード展開

状態方程式

$$\dot{x} = Ax$$

固有ベクトル v_i ↓ 「モード」という

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} v_1 + c_2 e^{s_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{s_n t} v_n$$

\updownarrow \updownarrow \updownarrow

$$y_1(t) \qquad y_2(t) \qquad y_n(t)$$

モード展開
モード座標

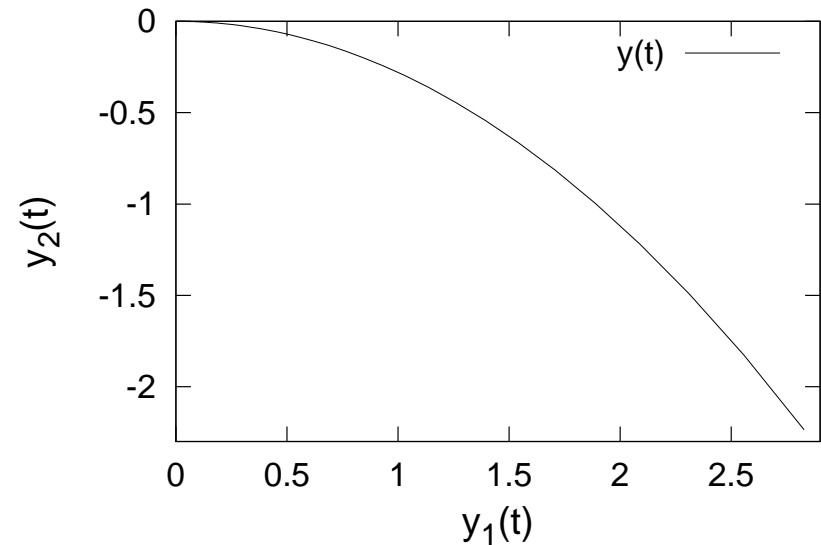
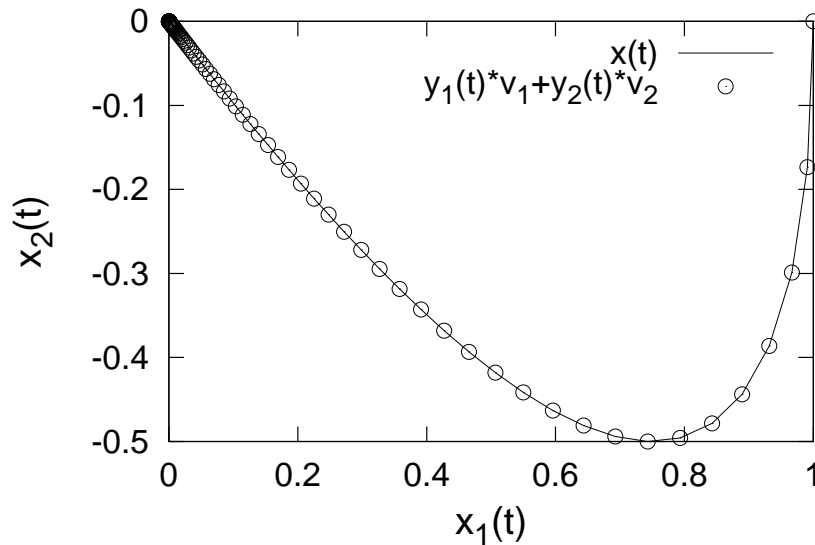
対角正準形

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} y$$

実習 5.1 1 つ前の例題の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ を用いて, 状態方程式 $\dot{x} = Ax$ の軌道 $x(t)$, モード座標の軌道 $y(t)$, およびモード座標から復元した軌道 $x(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2$ を比較せよ.

解答例

Code 7 を実行すると，次のような比較結果が得られる．元の状態量 $x(t)$ と，モード座標 $y(t)$ の軌道は異なるが (左右実線)，復元すると元に戻る (左) ．



第6回 動的システム入門

状態フィードバック

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

■ 対角化して分かること ⇨ 可制御性

- 線形制御系
- 可制御性と判定則

■ 可制御だとできること ⇨ 固有値設定

- “一本化”
- 状態フィードバック
- 固有値設定

対角化して分かること

— 可制御性 —

線形制御系

定義

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u(t)$$

- $u(t)$ は人為的な入力 (スカラ)
- \boldsymbol{b} はベクトル . $u(t)$ が作用する行と , 強度を表す .

$$\text{対角化} \Downarrow \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

可制御性

線形制御系 (対角正準形)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \beta \equiv T^{-1}b$$

■ 例えば, $\beta_1 = 0$ とすると,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = s_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = s_2 y_2 + \beta_2 u(t) \end{cases} \quad \text{互いに独立!}$$

となり, 制御入力 $u(t)$ が, 第 1 モード $y_1(t)$ には伝わらない.

可制御性

- 可制御 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 入力 $u(t)$ が全ての行に伝わる $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \neq 0$.
- 不可制御 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 入力 $u(t)$ が伝わらない行 $\beta_i = 0$ がある.

可制御性の判定則

目標

$\dot{x} = Ax + bu(t)$ の対角化 $\dot{y} = A'y + \beta u(t)$ において,

可制御 \iff 「全て $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \neq 0$ 」 $\leftarrow A, b$ で判定したい!

■ b と β の関係: $b = T\beta = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2$.
固有ベクトル

■ 両辺に A を乗じる. \mathbf{v}_i は固有ベクトルだから,

$$Ab = \beta_1 A\mathbf{v}_1 + \beta_2 A\mathbf{v}_2 = \beta_1 s_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 s_2 \mathbf{v}_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix}$$

- b, Ab を並べて , 可制御性行列 $U_c = [b, Ab]$ を作る .

$$\begin{aligned}
 U_c = [b, Ab] &= \left[[v_1, v_2] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right] \\
 &= [v_1, v_2] \left[\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right] = T \left[\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 s_1 \\ \beta_2 s_2 \end{bmatrix} \right] \\
 &= T \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 s_1 \\ \beta_2 & \beta_2 s_2 \end{bmatrix} = T \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ 1 & s_2 \end{bmatrix}}_V
 \end{aligned}$$

- 行列式 $|U_c| = |TBV| = |T| \cdot |B| \cdot |V|$ をとると , $|T|, |V| \neq 0$ より ,

$$\beta_i \neq 0 \text{ (全ての } i) \xLeftrightarrow[\text{十分}]{\text{必要}} |B| = \beta_1 \beta_2 \neq 0 \xLeftrightarrow[\text{十分}]{\text{必要}} |U_c| \neq 0$$

可制御性の判定則

可制御性行列 $U_c = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ が , $|U_c| \neq 0 \equiv \text{rank } U_c = n$

可制御だとできること

— 固有値設定 —

“一本化” と固有方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ kx_1 - cx_2 \end{bmatrix}$$

逆操作 \Downarrow $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

$$\ddot{x} = (\dot{x})' = \dot{x}_2 = kx_1 - cx_2 = kx - c\dot{x}$$

証明

$$\begin{aligned} x(t) = e^{st} \text{ を代入すると,} \\ s^2 e^{st} + c s e^{st} + k e^{st} = 0 \\ (s^2 + cs + k) e^{st} = 0 \text{ より,} \\ s^2 + cs + k = 0 \because e^{st} \neq 0 \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\ddot{x} + c\dot{x} - kx = 0 // \text{“一本化” 完了}$$

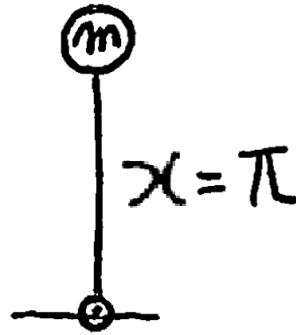
\Downarrow 同じ係数

$$s^2 + cs - k = 0 // \text{固有方程式}$$

“一本化” の固有方程式

同じ係数の代数方程式になる！

逆立ちした単振り子 (自然状態)



- 運動方程式 : $\ddot{x} - kx = 0$ (減衰なし, 外力なし)
- 固有方程式 : $s^2 - k = 0$ (同じ係数の 2 次方程式)
- 固有値 : $-\sqrt{k} < 0 < \sqrt{k}$ \Rightarrow 鞍点 \Rightarrow 発散

自然状態では, 振り子は倒れる!

逆立ちした単振り子 + P 制御

P 制御 (比例制御)

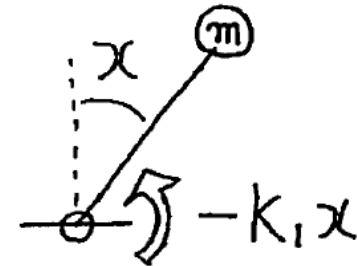
$$\ddot{x} - kx = u(t) = -K_1x \quad (\text{倒れ角 } x \text{ に比例した制御入力})$$

■ 移項して整理 : $\ddot{x} - (k - K_1)x = 0$

■ 固有方程式 : $s^2 - (k - K_1) = 0$

■ 固有値 : $s = \pm\sqrt{k - K_1}$

$k - K_1 < 0 \Rightarrow s = \pm|k - K_1|i$ (純虚数) \Rightarrow 単振動



P 制御した振り子は，倒れないが，止まらない！

振動も抑制したい \Rightarrow D 制御 (微分制御)

逆立ちした単振り子 + PD 制御

D 制御 (微分制御)

微分 \dot{x} に比例する制御入力

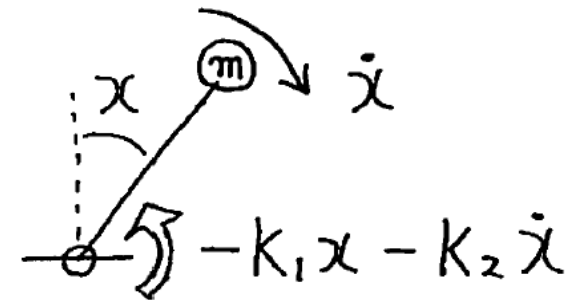
PD 制御 $\overset{\text{定義}}{\iff}$ P 制御 + D 制御

$$\ddot{x} - kx = u(t) = -K_1x - K_2\dot{x}$$

■ 移項して整理 : $\ddot{x} + K_2\dot{x} - (k - K_1)x = 0$

■ 固有方程式 : $s^2 + K_2s - (k - K_1) = 0$

■ 固有値 : $s = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 + 4(k - K_1)}}{2}$



適当な K_1, K_2 \Rightarrow 安定結節点 (減衰) or 安定渦点 (減衰振動)

PD 制御した振り子は , 上死点に向って減衰する ! 安定に立つ !

適当な K_1, K_2 とは ? \Rightarrow 固有値設定問題

PD 制御 = 状態フィードバック

PD 制御を受ける単振り子

$$\ddot{x} - kx = u(t) = -K_1x - K_2\dot{x} = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

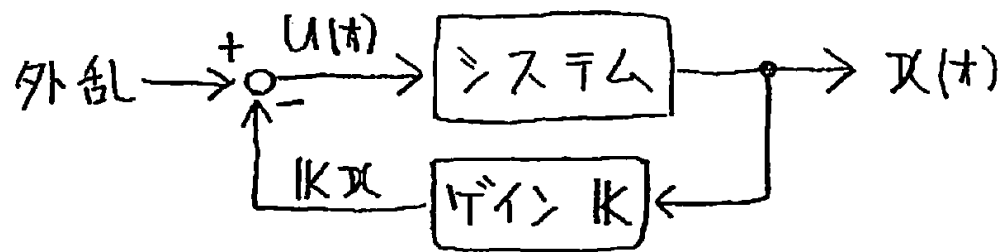
1 階化 \Downarrow $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$

状態フィードバック

$$\dot{x} = Ax + bu(t)$$

$$u(t) = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = -(K_1, K_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -Kx$$

フィードバックとは?
出力 $x(t)$ を入力 $u(t)$ に
戻す操作のこと。



固有値設定 — 適切なゲイン K_1, K_2 の定め方

PD 制御を受けるシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-K_1 x_1 - K_2 x_2)$$

↓ “一本化”

$$\ddot{x} + K_2 \dot{x} - (k - K_1)x = 0$$

↓ 固有方程式

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + K_2 s - (k - K_1) = 0 \\ s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = 0 \end{array} \right\} \text{係数比較} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = k + s_1 s_2 \\ K_2 = -(s_1 + s_2) // \end{cases}$$

↑ 固有方程式

設定したい固有値

$$s = s_1, s_2 \quad \text{固有方程式} \quad (s - s_1)(s - s_2) = 0$$

例題 固有値が $s_1, s_2 = -1 \pm 2i$ (減衰振動) となるような, ゲイン K_1, K_2 を求めよ. $k = 2$ とせよ.

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + K_2 s - (k - K_1) = 0 \\ s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = 0 \end{array} \right\} \text{係数比較} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = k + s_1 s_2 \\ K_2 = -(s_1 + s_2) // \end{cases}$$

解答例

$$K_1 = 2 + (-1 + 2i)(-1 - 2i) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$K_2 = -\{(-1 + 2i) + (-1 - 2i)\} = 2$$

Octave による検算：

```
octave:1> s1=-1-2*i, s2=-1+2*i
s1 = -1 - 2i
s2 = -1 + 2i
octave:2> k=2
k = 2
octave:3> K1=k+s1*s2
K1 = 7
octave:3> K2=-(s1+s2)
K2 = 2
octave:5> roots([1,K2,-(k-K1)])
ans =
    -1 + 2i
    -1 - 2i
```


第7回 動的システム入門

可制御正準形

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- n 次元制御系を“一本化”する。
 - 可制御ならできる！  可制御正準形
 - 可制御正準形の求め方
 - n 次元の“一本化”
- n 次元制御系で固有値設定を行う。
 - 状態フィードバック
 - 固有方程式の比較
 - 固有値設定

n 次元制御系の固有値設定

目標

$$\dot{x} = Ax + bu(t)$$

↓ “一本化”

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dx}{dt} + a_1 x = u(t)$$

↓ 状態フィードバック

$$u(t) = - \left(K_1 x + K_2 \frac{dx}{dt} + \cdots + K_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right)$$

↓ 固有方程式

$$s^n + (a_n + K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 + K_2)s + (a_1 + K_1) = 0$$

ゲイン $K = (K_1, \cdots, K_n)$ で固有値設定する！

n 次元制御系の“一本化”

可制御正準形 すぐに“一本化”できる形式

$$\dot{\mathbf{y}} = A_c \mathbf{y} + \mathbf{b}_c u(t) :$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} u(t)$$

$y_1 = y$ とおくと , 順次 , $y_2 = \dot{y}$, $y_3 = \ddot{y}$, \cdots , $y_n = y^{(n-1)}$

最終行  に代入

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_2 \dot{y} + a_1 y = u(t) //$$

可制御正準形は , すぐに“一本化”できる \therefore 固有値設定できる!

可制御正準形への変形可能性

定理

制御系 $\dot{x} = Ax + bu(t)$ が可制御ならば，適当な斜交成分 $y = T_c^{-1}x$ が存在して，可制御正準形 $\dot{y} = A_c y + b_c u(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} u(t)$$

が得られる．ただし， $A_c = T_c^{-1}AT_c$ ， $b_c = T_c^{-1}b$ ．

⇒ 基底変換行列 T_c の求め方？

基底変換行列 T_c の求め方

■ 基底変換行列 $T_c = U_c W$

■ 可制御性行列 $U_c = [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}]$

■ $W = [w_{ij}] = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & \ddots & a_n & 1 & \\ \vdots & a_n & 1 & & \\ a_n & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$

↑ 表 6.1

固有方程式 $|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$

実習 6.1 Code 9 を実行せよ . 乱数で無作為に作った A, b について , 対応する可制御正準形の A_c, b_c が求まる .

実行例

A, b を乱数で発生させるので , 実行結果は , 毎回変化する !

```
A =
  0.858128  -1.517189  -0.741770
 -0.188327   0.907228   1.588477
 -0.053336   0.308342   0.099851

bb =
 -0.86866
  0.62442
  1.29061

aa =
  0.23538   0.13970  -1.86521

W =
  0.13970  -1.86521   1.00000
 -1.86521   1.00000   0.00000
  1.00000   0.00000   0.00000

Tc =
 -1.94333  -1.02990  -0.86866
 -1.49290   1.61552   0.62442
  0.52972  -2.03953   1.29061

Ac =
 -0.00000   1.00000  -0.00000
 -0.00000   0.00000   1.00000
 -0.23538  -0.13970   1.86521

bbc =
 -0
  0
  1
```

-0 や -0.00... は 0 のこと !

固有値設定問題

斜交成分 y の固有値設定

$$\dot{x} = Ax + bu(t) \Rightarrow \dot{y} = A_c y + b_c u(t) \text{ 可制御正準形!}$$

“一本化” \Downarrow 状態フィードバック

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y = u(t) = - \left(K_1 y + \cdots + K_n y^{(n-1)} \right)$$

固有方程式 \Downarrow

$$\left. \begin{aligned} s^n + (a_n + K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_1) &= 0 \\ s^n + c_n s^{n-1} + \cdots + c_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



係数比較

$$K_i = c_i - a_i$$

固有方程式 \Uparrow $(s - s_1) \cdots (s - s_n) = 0$

目標とする固有値 s_1, \cdots, s_n

直交成分への翻訳

$$u(t) = -\mathbf{K}y = -\underbrace{\mathbf{K}T_c^{-1}}_{\mathbf{K}_p}x$$

固有値設定 (まとめ)

線形制御系 $\dot{x} = Ax + bu(t)$ の固有値は，状態フィードバック，

$$u(t) = -\mathbf{K}_p x, \quad \mathbf{K}_p \equiv (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)T_c^{-1}$$

で設定できる．ただし，

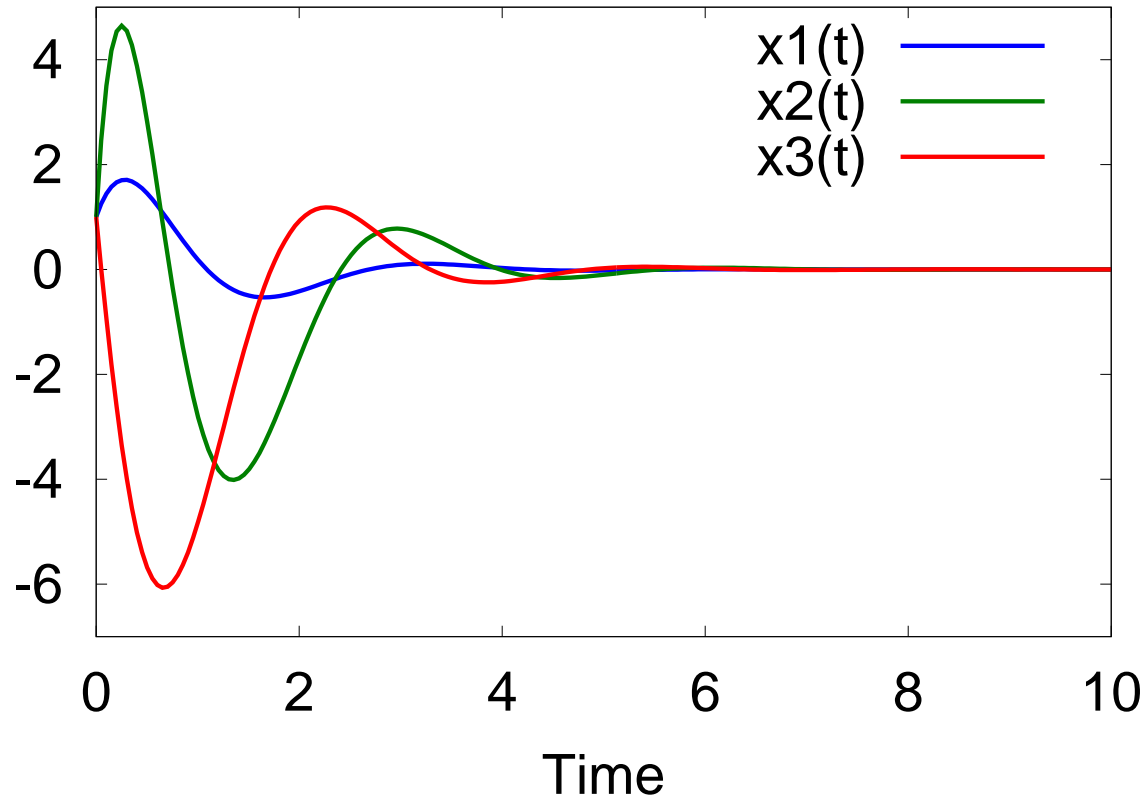
a_i A の固有方程式 $|A - sI| = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1 = 0$ の係数．

c_i 目標の s_1, \dots, s_n を解に持つ固有方程式 $s^n + c_n s^{n-1} + \dots + c_1 = 0$ の係数．

実習 6.2 Code 10 を実行せよ．乱数で無作為に作った A, b について，目標の固有値 $-1 - 2i, -1 + 2i, -3$ を実現するゲイン K_p が求まり，そのときの時間応答が表示される．

解答例

乱数で状態方程式を生成するため，時間応答は，毎回変化する．



第 8 回 動的システム入門

演習 1 — Octave 入門

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

演習の進め方

- テキストの 11 章「演習 1」を自習せよ。
- グループワークを成績評価の前提条件とする。
 - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと。
 - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ。
 - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ。
 - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ。

グループワークの重要性

権威 (授業なら教員) に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される。自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる。

第9回 動的システム入門

演習2 — 動的システムと固有値設定

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

演習の進め方

- テキストの 12 章「演習 2」を自習せよ。
- グループワークを成績評価の前提条件とする。
 - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと。
 - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ。
 - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ。
 - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ。

グループワークの重要性

権威（授業なら教員）に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される。自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる。

第 10 回 動的システム入門

関数の最小化 (微分法)

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

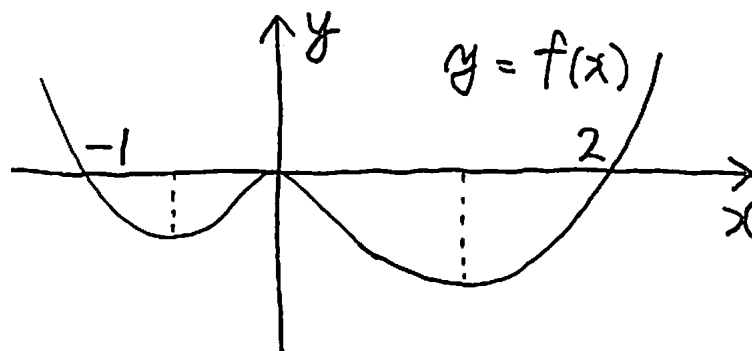
<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- 関数の最小化 (微分法)
- 拘束条件付きの最小化 (ラグランジュの未定乗数法)
- 最適制御問題

最小化と微分法

- 例えば，4次曲線 $y = f(x) = x^2(x+1)(x-2)$.



- 最小点 $x = a$ を探すには，微分 0 の点を求めればよい .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(x+1)(x-2) + x^2(x-2) + x^2(x+1) \\ &= 4x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \end{aligned}$$

- 最小点の候補 $a \approx -0.693, 0, 1.443$.

微分するだけでは，どれが最小点か，分らない！

最小化の必要条件

- 最小値と微分の関係：

$$\underbrace{f(x) \text{ が } x = a \text{ で最小値をとる}}_P \xrightarrow{\text{ならば}} \underbrace{\text{微分 } f'(a) = 0}_Q$$

- 因果関係 $P \implies Q$ $\begin{cases} P \text{ は, } Q \text{ であるための十分条件.} \\ Q \text{ は, } P \text{ であるための必要条件.} \end{cases}$



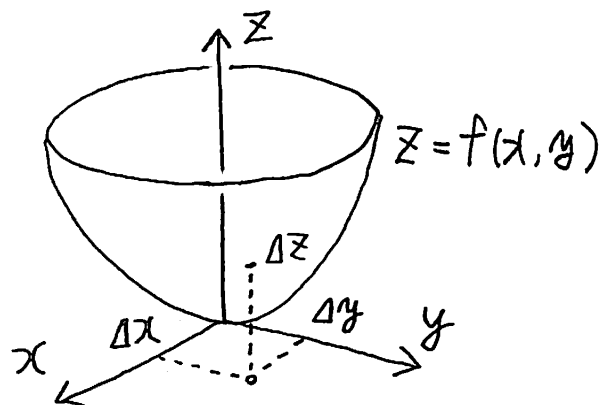
算法 7.1

関数 $f(x)$ が $x = a$ で最小となる**必要条件**は, $f'(a) = 0$ である.

最小化の必要条件は, 最小点の「候補」を与える.

2変数関数 $f(x, y)$ の最小化

- 例えば, 2次曲面 $z = f(x) = f(x, y) = x^2 + y^2$



- 点 $a = (a, b)$ で最小となる必要条件 ... 増分 Δz が 0 になること .

$$\begin{aligned}\Delta z &\equiv f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= (a + \Delta x)^2 + (b + \Delta y)^2 - a^2 - b^2 \\ &= (2a)\Delta x + (2b)\Delta y + \underline{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}_0 = 0\end{aligned}$$

∴ 最小点は
 $a = b = 0$

n 変数関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ の最小化

表記

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} \Delta z &\equiv f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \Delta x_n = 0 \end{aligned}$$



n 変数関数の最小化

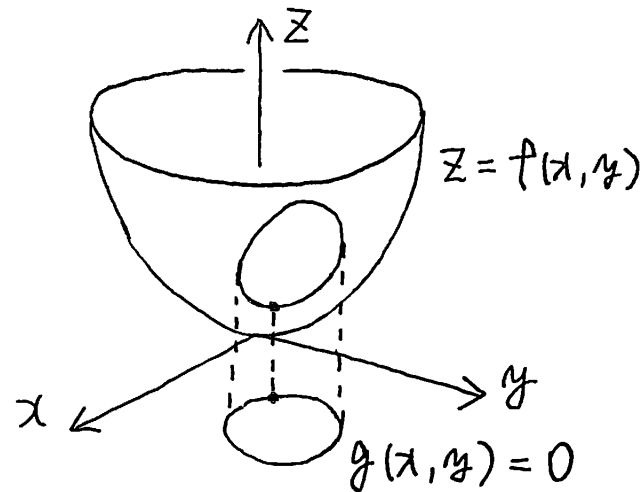
関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ で最小となる必要条件是、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = 0$$

拘束条件付きの最小化

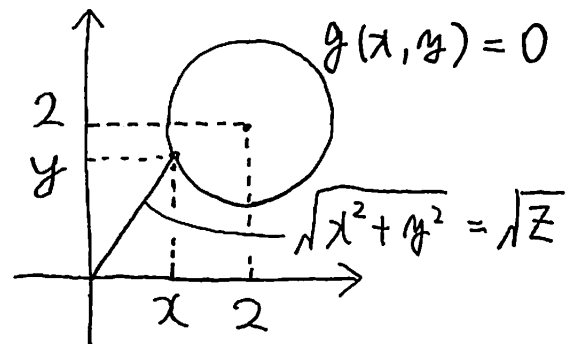
表記

$$\min_x : f(\boldsymbol{x}) \quad \text{sub.to} : g(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$$



- 拘束条件 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ を満足する \boldsymbol{x} のなかで, $f(\boldsymbol{x})$ を最小化する!

代入法は面倒くさい！



■ 例題：

$$\begin{cases} \min_x : f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{sub.to} : g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{中心 } (2, 2) \text{ の単位円}$$

■ $g(x, y)$ を y について解く $\Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{1 - (x - 2)^2}$

■ 代入すると，1 変数関数 $f(x)$ に帰着．

$$f(x, y) = x^2 + \left\{ 2 \pm \sqrt{1 - (x - 2)^2} \right\}^2 \equiv f(x)$$

■ $\pm\sqrt{\dots}$ を含む必要条件 $f'(a) = 0$ は，解きにくい！

\Rightarrow ラグランジュの未定乗数法

ラグランジュの未定乗数法

未定乗数法

拘束条件付き最小化

$$\min_{\boldsymbol{x}} : f(\boldsymbol{x})$$

$$\text{sub.to} : g(\boldsymbol{x}) = 0$$

変形できる！



ラグランジュ乗数 λ

拘束条件なし最小化

$$\min_{(\boldsymbol{x}, \lambda)} : h(\boldsymbol{x}, \lambda)$$

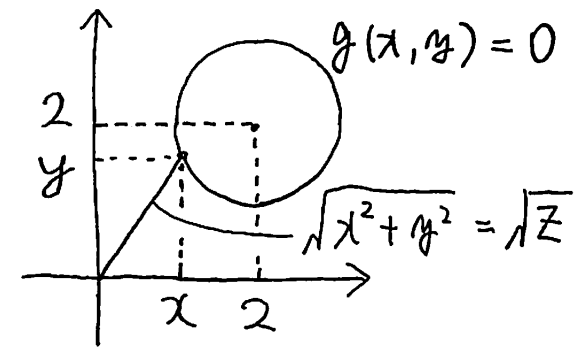
$$h(\boldsymbol{x}, \lambda) \equiv f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$$



新しい必要条件

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \dots = \frac{\partial h}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x}, \lambda) = 0$$

未定乗数法の例題



■ 例題 :

$$\begin{cases} \min_x : f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{sub.to} : g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{中心 } (2, 2) \text{ の単位円}$$

未定乗数法 \Rightarrow $\min : h(x, y, \lambda) \equiv x^2 + y^2 + \lambda \left\{ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 \right\}$

■ 必要条件 : $0 = \frac{\partial h}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x - 2) \quad \therefore x = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$

$0 = \frac{\partial h}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - 2) \quad \therefore y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$

$0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1 \quad \therefore \lambda = -1 \pm 2\sqrt{2} //$

■ 最小点の候補 : $(x, y) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
最小

練習問題

$$\begin{cases} \min_x : f(x, y) = 2x + 2y & \text{長方形の周長} \\ \text{sub.to} : g(x, y) = xy - 1 = 0 & \text{面積 1} \end{cases}$$

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0$$

解答例

■ 未定乗数法 $\Rightarrow \min : h(x, y, \lambda) \equiv 2x + 2y + \lambda \{xy - 1\}$

■ 必要条件 : $0 = \frac{\partial h}{\partial x} = 2 + \lambda y \quad \therefore y = -\frac{2}{\lambda}$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial y} = 2 + \lambda x \quad \therefore x = -\frac{2}{\lambda}$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda} = xy - 1 = \frac{4}{\lambda} - 1 \quad \therefore \lambda = \pm 2 //$$

■ 最小点の候補 : $(x, y) = \underbrace{(-1, -1)}_{\text{最小}}, \underbrace{(1, 1)}_{\text{最小}} //$

■ 周長を最小にする面積 1 の長方形は「正方形」!

多次元の未定乗数法

■ n 変数関数 ... $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

■ m 本の拘束条件式 ... $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

ラグランジュ乗数 (m 個) $\Downarrow \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$

■ $h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$

未定乗数法 (拘束条件 m 本)

$$\begin{array}{l} \min_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \\ \text{sub.to} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{等価} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \min_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} : h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \text{必要條件} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \end{cases}$$

(補足：転置部分の詳細)

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &\equiv f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \\ &= f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

最適制御問題

- 与えられた評価関数 (省エネ, 乗り心地, ...) を, 最小化 or 最大化する制御入力 $u(t)$ を求める問題のこと.

最適制御の例

$$\begin{cases} \min_{u(t)} : J = \int_{t_0}^{t_1} q x(s)^2 + r u(s)^2 ds & (\text{評価関数}) \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) & (\text{状態方程式}) \end{cases}$$

評価関数の係数 q, r を「重み」という.

- 特徴 1 : 最小化する関数 J の値が, 関数形 $x(t), u(t)$ で決まる.
- 特徴 2 : 拘束条件が「微分方程式」である.

∴ 微分法では解けない!  「変分法」だと解ける (次回)

境界条件

両端固定 ... 積分区間 $\int_{t_0}^{t_1}$ の両端で，状態量を指定

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

具体例 停止状態にある自動車を，5 秒後に 100m 地点を時速 100km/s で通過させ (両端固定)，このときの消費エネルギーを最小化せよ (最適制御) .

終端自由 ... 初期値のみ指定

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \text{任意}$$

具体例 クレーン (単振り子) の振動エネルギーを最小化せよ (最適制御) . 制御は「掛けっぱなし」とする (終端自由)

第 11 回 動的システム入門

最適制御入門 (変分法)

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- 最適制御問題の定式化 (復習)
- 汎関数の最小化問題 ⇨ 変分法
- 最適制御問題の解法 (1 次元)
- 例題 (1 次元)
- n 次元の解法

(最適制御問題)

- 与えられた評価関数 (省エネ, 乗り心地, ...) を, 最小化 or 最大化する制御入力 $u(t)$ を求める問題.

最適制御の例

$$\begin{cases} \min_{u(t)} : J = \int_{t_0}^{t_1} q x(\tau)^2 + r u(\tau)^2 d\tau & \text{(評価関数)} \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) & \text{(状態方程式)} \end{cases}$$

評価関数の係数 q, r を「重み」という.

- 特徴 1 : 最小化する関数 J の値が, 関数形 $x(t), u(t)$ で決まる.
- 特徴 2 : 拘束条件が「微分方程式」である.

∴ 微分法では解けない!  「変分法」だと解ける (今回)

変分法

汎関数

汎関数

「関数の関数」のこと．関数形 $x(t)$ を代入すると値が定まる．

$$J[x(t)] = \text{値}$$

積分型の汎関数 (典型例)

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau$$



最小化の必要条件

$$\text{汎関数の増分} : \delta J[x(t)] \equiv J[x(t) + \delta x(t)] - J[x(t)] = 0$$

■ 関数 $x(t)$ の微小な「ずれ」 $\delta x(t)$ を変分という．

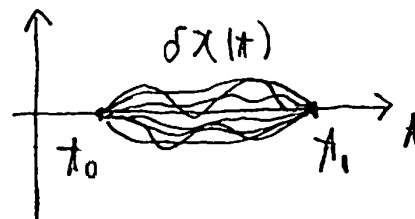
通常の変数 x の微小な「ずれ」は微分と呼んだ．

変分の境界条件

求める関数 $x(t)$ の $\begin{cases} x(t_0) = x_0, \delta x(t_1) = x_1 & (\text{両端固定}) \\ x(t_0) = x_0, \delta x(t_1) = \text{任意} & (\text{終端自由}) \end{cases}$ に合わせて……

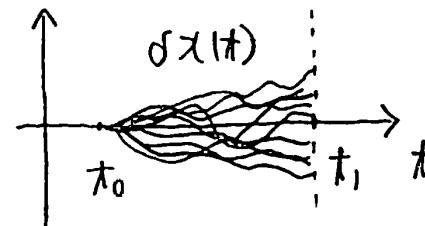
両端固定

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta x(t_1) = 0$$



終端自由

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta x(t_1) = \text{任意}$$



■ 変分 $\delta x(t)$ は，微小振幅の様々な関数！

通常の微少量 Δx は，様々な微小数 $0.01, -0.002, \dots$.

汎関数の増分 $\delta J[x(t)]$

定理

$$\begin{aligned}\delta J[x(t)] &\equiv J[x(t) + \delta x(t)] - J[x(t)] \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} \delta x(t_1) - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x d\tau\end{aligned}$$

■ 証明の方針：

関数の全微分と同様の展開，

$$L(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - L(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \delta \dot{x}$$

と部分積分を使う．

最小化の必要条件 (両端固定)

オイラーの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

■ 証明 :

両端固定の変分 $\delta x(t_0) = 0, \delta x(t_1) = 0$ を , 汎関数の増分 $\delta J[x(t)]$ に代入すると , 積分の項だけが残る ,

$$\delta J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x d\tau = 0$$

変分 $\delta x(t)$ の関数形は任意だから , **下線**が 0 となる .

最小化の必要条件 (終端自由)

オイラーの方程式 + 追加の終端条件

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_1} = 0$$

■ 証明：

終端自由より，一般に $\delta x(t_1) \neq 0$ なので，2 項が残る．

$$\delta J[x(t)] = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_1} \delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta x d\tau = 0$$

$\delta x(t_1) \neq 0$ より，下線も 0 となる．

汎関数の最小化 (n 次元)

$\boldsymbol{x}(t) = [x_i(t)]$ の各成分 $x_i(t)$ に対して，同様な算法が成立する．

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

終端自由「 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}(t_1) = \text{任意}$ 」に対して，

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

ベクトルで  短縮表記

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \right], \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \quad \Rightarrow \quad n \text{ 次元の公式}$$

最小化の必要条件 (n 次元)

オイラーの方程式 (n 次元)

積分型の汎関数 ,

$$J[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)) d\tau, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$$

を最小化するベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は , オイラーの方程式 ,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) \equiv \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] = \mathbf{0}$$

の解となる . 終端自由 ($\boldsymbol{x}_1 =$ 任意) では , 追加の終端条件が課される .

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right|_{t=t_1} \equiv \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t_1} \right] = \mathbf{0}$$

最適制御の解法

解法 (1 次元)

最適制御問題 (1 次元)

$$\begin{cases} \min_{x,u} : J = \int_{t_0}^{t_1} L(x(\tau), u(\tau)) d\tau & \text{with } x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \end{cases}$$

ラグランジュの  未定乗数法 (λ)

$$\begin{cases} \min_{x,u,\lambda} : J' = \int_{t_0}^{t_1} L'(x(\tau), u(\tau), \lambda(\tau)) d\tau & \text{with } x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \\ L'(x, u, \lambda) \equiv L(x, u) + \lambda(f(x, u) - \dot{x}) \end{cases}$$

 必要条件は , オイラーの方程式

必要条件 (1 次元)

最適制御の必要条件 (1 次元)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}(L + \lambda f) \quad (\text{随伴方程式}) \\ 0 = \frac{\partial}{\partial u}(L + \lambda f) \quad (\text{入力の条件}) \\ \dot{x} = f(x, u) \quad (\text{状態方程式}) \end{array} \right. \text{ with } \left\{ \begin{array}{l} \text{両端固定} \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \\ \text{終端自由} \\ x(t_0) = x_0, \lambda(t_1) = 0 \end{array} \right.$$

■ 証明：オイラーの方程式より，

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} (-\lambda) \quad \therefore \dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}(L + \lambda f)$$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} (0) \quad \therefore 0 = \frac{\partial}{\partial u}(L + \lambda f)$$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} \right) = \dot{x} - f(x, u) - \frac{d}{dt} (0) \quad \therefore \dot{x} = f(x, u)$$

証明の続き

- また，終端自由の場合は， $x(t_1) = x_1$ の代わりに， $\lambda(t)$ の終端条件，

$$0 = \left. \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} = -\lambda(t_1) \quad \therefore \lambda(t_1) = 0$$


が課される．


例題 (1 次元)

例題と解法

冒頭の例題

$$\begin{cases} \min_{u(t)} : J = \int_{t_0}^{t_1} q x(\tau)^2 + r u(\tau)^2 d\tau & \text{(評価関数)} \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) & \text{(状態方程式)} \end{cases}$$

$L = q x^2 + r u^2, f = a x + b u$  最適制御の必要条件 (1次元) に代入
 $\dot{\lambda} = -2q x - a \lambda, \quad \underline{0 = 2r u + b \lambda}, \quad \dot{x} = a x + b u$

最適入力  $u(t) = -\frac{b}{2r} \lambda(t)$

整理された必要条件

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a x(t) - \frac{b^2}{2r} \lambda(t) & \text{(状態方程式)} \\ \dot{\lambda}(t) = -2q x(t) - a \lambda(t) & \text{(随伴方程式)} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \\ \text{or} \\ x(t_0) = x_0, \lambda(t_1) = 0 \end{cases}$$

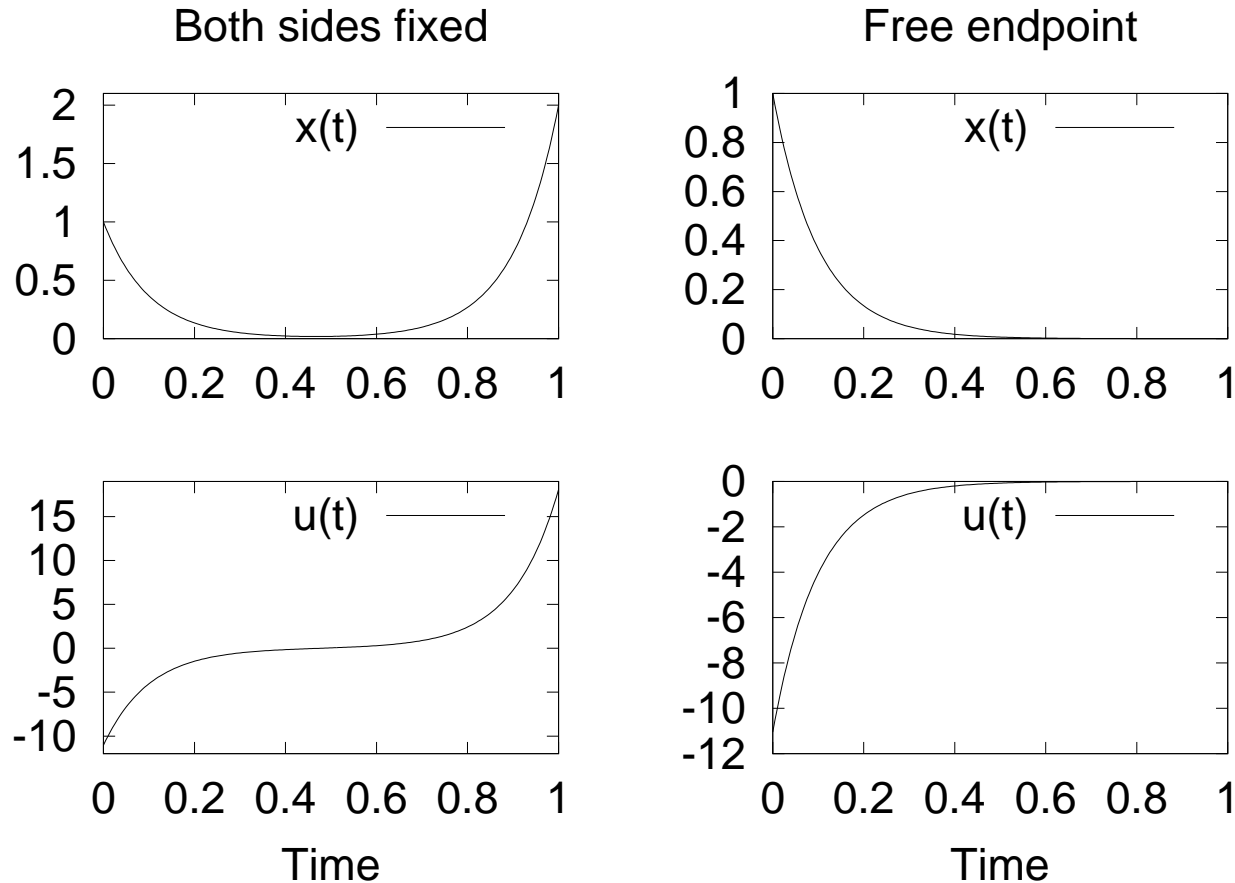
実習 8.1 「整理された必要条件」の数値解を求め，状態 $x(t)$ と最適入力 $u(t)$ の時間応答を観察せよ．境界条件は，

$$\begin{cases} \text{両端固定 } x(0) = 1, x(1) = 2 \\ \text{終端自由 } x(0) = 1, \lambda(1) = 0 \end{cases}$$

の 2 種類とし，その他のパラメータは， $a = 1, b = 1, q = 100, r = 1$ とせよ．次に，重み q, r を変化させて，重みの効果を考察せよ．

解答例

テキストの解答例の要領で、整理された必要条件と等価な初期値問題を導く。これを Code 13 で解くと、次の結果が得られる。



n 次元の解法

最適制御の解法 (n 次元)

n 次元の最適制御問題 ,

$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ \text{sub.to} : \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \text{with } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$

を達成する制御入力 $\mathbf{u}(t)$ は , 次の方程式の解となる . (T は転置)

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{ハミルトニアン})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{随伴方程式})$$

$$\mathbf{0} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{入力の条件})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{状態方程式})$$

終端自由の場合は , 終端条件 $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ の代わりに , $\boldsymbol{\lambda}(t_i) = \mathbf{0}$ を課す .

第 12 回 動的システム入門

最適レギュレータ

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

学習目標

- 最適レギュレータとは？
- 最適レギュレータの必要条件
- 状態フィードバック表示
- リカッチ方程式 (有限時間)
- リカッチ方程式 (無限時間)

最適レギュレータとは？

— 別名：LQR —

- 状態方程式が，線形 (Linear)
 - 評価関数が，2次 (Quadratic)
 - 境界条件が，終端自由
- } である最適制御のこと！
- レギュレータ (Regulator) ... 掛けっぱなしの定値制御 終端自由

最適レギュレータ (LQR) 問題

$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} \{ \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \} d\tau \\ \text{sub.to} : \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_1) = \text{終端自由} \end{cases}$$

ただし，行列 Q, R は対称かつ正定値．

正定値 についてはテキストの 9.1.3 節 p.65 を参照のこと．

必要条件

最適制御の解法 (n 次元)

n 次元の最適制御問題 ,

$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \\ \text{sub.to} : \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \text{with } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$


を達成する制御入力 $\mathbf{u}(t)$ は , 次の方程式の解となる . (T は転置)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{随伴方程式})$$

$$\mathbf{0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{入力の条件})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{状態方程式})$$

終端自由の場合は , 終端条件 $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ の代わりに , $\boldsymbol{\lambda}(t_i) = \mathbf{0}$ を課す .


最適レギュレータ $L = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}$, $\mathbf{f} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u}$ を代入 

必要条件の導出

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \lambda = -2Q\mathbf{x} - A^T \lambda \quad \because Q^T = Q \\ \mathbf{0} = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \lambda = \underline{2R\mathbf{u} + B^T \lambda} \quad \because R^T = R \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = A\mathbf{x} + B\underline{\mathbf{u}} \quad \leftarrow \text{最適入力} \quad \underline{\mathbf{u} = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \lambda} \end{array} \right.$$

整理された必要条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B \left(\underline{-\frac{1}{2}R^{-1}B^T \lambda} \right) \quad (\text{状態方程式}) \\ \dot{\lambda} = -2Q\mathbf{x} - A^T \lambda \quad (\text{随伴方程式}) \end{array} \right. \quad \text{with} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \lambda(t_1) = \mathbf{0} \end{array}$$

ベクトルでまとめて整理 

LQR の状態フィードバック表示 (1/2)

整理された必要条件 (ベクトル形式)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BR^{-1}B^T \\ -2Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = M\mathbf{q}$$

行列指数関数 e^{Mt}  と終端時刻 t_1

$$\text{解 } \mathbf{q}(t) = \underbrace{e^{M(t-t_1)}}_{\Phi(t)} \mathbf{q}(t_1)$$

■ 推移行列 $\Phi(t)$ の 4 分割 : $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}$

■ 終端条件 $\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \mathbf{0}$ の代入 : $\mathbf{q}(t_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{q}(t) = \Phi(t) \mathbf{q}(t_1) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t)\mathbf{x}(t_1) \\ \Phi_{21}(t)\mathbf{x}(t_1) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{x}(t_1) \text{ 消去!}$$

LQR の状態フィードバック表示 (2/2)

■ $\boldsymbol{x}(t_1)$ の消去 : $\boldsymbol{\lambda}(t) = \Phi_{21}(t)\boldsymbol{x}(t_1) = \underbrace{\Phi_{21}(t)\Phi_{11}(t)^{-1}}_{\equiv 2P(t)}\boldsymbol{x}(t)$

$\therefore \boldsymbol{\lambda}(t) = 2P(t)\boldsymbol{x}(t) //$

↓ 制御入力 $\boldsymbol{u}(t)$ に代入

■ 最適入力 : $\boldsymbol{u}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t) = -R^{-1}B^T P(t)\boldsymbol{x}(t)$

$\therefore \boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T P(t)\boldsymbol{x}(t) //$ 状態フィードバックで表せた！

謎の行列

$$P(t) \equiv \frac{1}{2}\Phi_{21}(t)\Phi_{11}(t)^{-1}$$

$\Phi_{ij}(t)$ が邪魔！ ➡ 微分すると消去できる

リカッチ方程式 (1/2)

行列の時間微分

時間に依存する行列 $A(t), B(t)$ に対して,

$$1. \{A(t) B(t)\}' = \dot{A}(t) B(t) + A(t) \dot{B}(t)$$

$$2. \{A(t)^{-1}\}' = -A(t)^{-1} \dot{A}(t) A(t)^{-1}$$

$$\blacksquare \dot{P} = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{21} \Phi_{11}^{-1} + \frac{1}{2} \Phi_{21} (\Phi_{11}^{-1})' = \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{21} \Phi_{11}^{-1} - \underbrace{\frac{1}{2} \Phi_{21} \Phi_{11}^{-1}}_P \underbrace{\dot{\Phi}_{11} \Phi_{11}^{-1}}$$

推移行列の性質 \Downarrow
$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{11} = M_{11} \Phi_{11} + M_{12} \Phi_{21} \\ \dot{\Phi}_{21} = M_{21} \Phi_{11} + M_{22} \Phi_{21} \end{cases}$$

$$\blacksquare \frac{\dot{\Phi}_{21} \Phi_{11}^{-1}}{\dot{\Phi}_{11} \Phi_{11}^{-1}} = \frac{(M_{21} \Phi_{11} + M_{22} \Phi_{21}) \Phi_{11}^{-1}}{(M_{11} \Phi_{11} + M_{12} \Phi_{21}) \Phi_{11}^{-1}} = \frac{M_{21} + M_{22}(2P)}{M_{11} + M_{12}(2P)} \Rightarrow \dot{P} \text{ に代入}$$

リカッチ方程式 (2/2)

- $$\begin{aligned}\dot{P} &= \frac{1}{2}M_{21} + M_{22}P - P(M_{11} + 2M_{12}P) \\ &= \frac{1}{2}M_{21} + M_{22}P - PM_{11} - P(2M_{12})P\end{aligned}$$

↓ 代入
$$\begin{cases} M_{11} = A, & M_{12} = -\frac{1}{2}BR^{-1}B^T \\ M_{21} = -2Q, & M_{22} = -A^T \end{cases}$$

- $$\dot{P} = -Q - A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P // \text{リカッチ方程式という!}$$
- 境界条件： $P(t_1) = O$ テキスト参照

最適レギュレータの解法

有限時間 LQR

最適レギュレータ (LQR) 問題の最適入力は ,

$$\mathbf{u}(t) = -K(t) \mathbf{x}(t), \quad K(t) \equiv R^{-1} B^T P(t)$$

で与えられる . 行列 $P(t)$ は , 次のリカッチ方程式の解である .

$$\dot{P} = -Q - A^T P - P A + P B R^{-1} B^T P, \quad P(t_1) = O \quad \text{零行列}$$

- 時間変化するゲイン $K(t) = R^{-1} B^T P(t)$ を可変ゲインという .
- リカッチ方程式の解 $P(t)$ は , 状態量 $\mathbf{x}(t)$ とは無関係に求まる .



応用上の利点

システムの構造 A, B, Q, R から , 制御器を**事前に設計**できる .

実習 9.1 実習 8.1 で観察した終端自由の最適制御問題，


$$\begin{cases} \min : J = \int_{t_0}^{t_1} q x(\tau)^2 + r u(\tau)^2 d\tau, \\ \text{sub.to} : \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \text{任意} \end{cases}$$

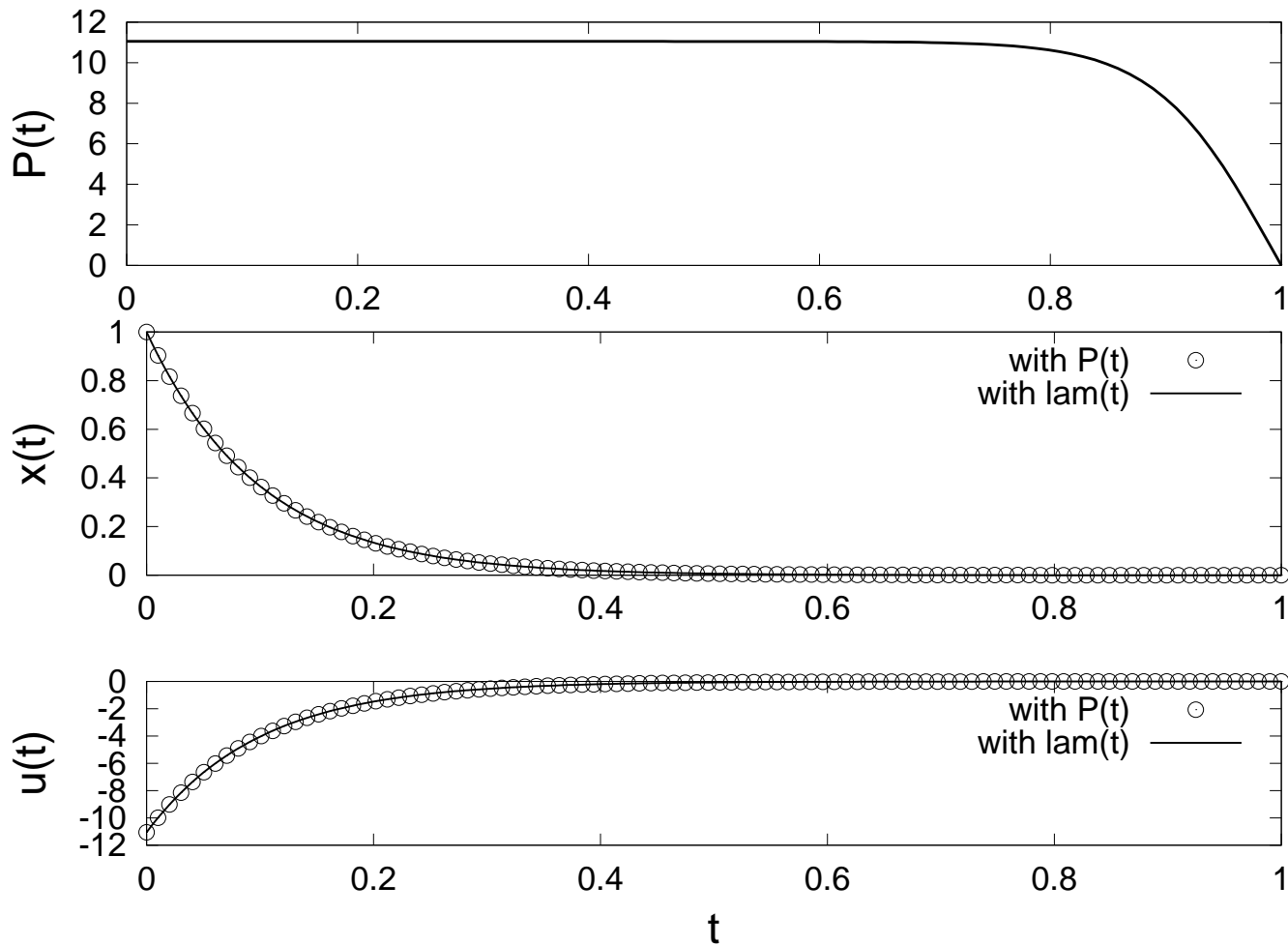
は最適レギュレータ問題となる．対応するリカッチ方程式，

$$\dot{P} = -P - aP - Pa - Pb \frac{1}{r} bP, \quad P(t_1) = 0$$

の数値解 $P(t)$ を求め，制御入力 $u(t) = -\frac{1}{r} bP(t)x(t)$ と状態量 $x(t)$ の時間応答を観察せよ．次に，終端時刻 t_1 を増加させ， $P(t)$ のグラフがどう変化するか観察せよ．

解答例

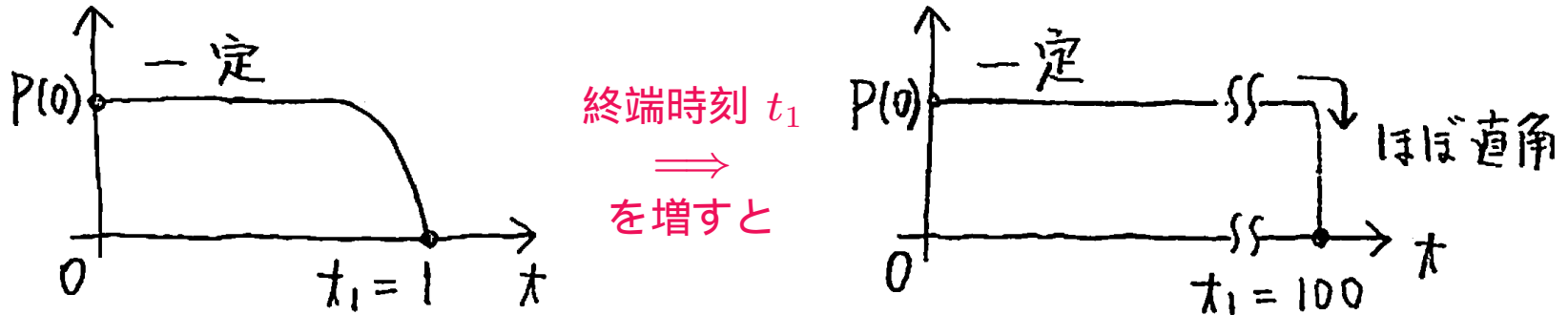
Code 13 を実行した後に，Code 14 を実行する． 次のスライド



■ 中段・下段 ... 実線は実習 8.1 の時間応答 . が今回求めた時間応答 .
同じ問題の解なので , 両者は重なる .

無限時間 最適レギュレータ

- 実習 9.1 のリカッチ方程式の解 $P(t)$ の性質：



- 実は，一般に $t_1 = \infty \implies P(t) = P(0)$ 定数行列
- ゆえに， $t_1 = \infty \implies \dot{P}(t) = 0$ 零行列
- $\dot{P} = -Q - A^T P - PA + PBR^{-1}B^T P = 0 //$

リカッチ代数方程式という！

最適レギュレータの解法 (無限時間)

無限時間 LQR

終端時刻が $t_1 = \infty$ のとき，最適レギュレータ (LQR) の最適入力は，

$$\mathbf{u}(t) = -K \mathbf{x}(t), \quad K \equiv R^{-1} B^T P(0)$$

ただし，行列 $P(0)$ は，次のリカッチ代数方程式の解である．

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = O \quad (\text{零行列})$$

■ ゲインが，固定ゲイン $K = R^{-1} B^T P(0)$ となる．

⇒ 制御器に，時間波形 $K(t)$ を記憶させておく必要がない．



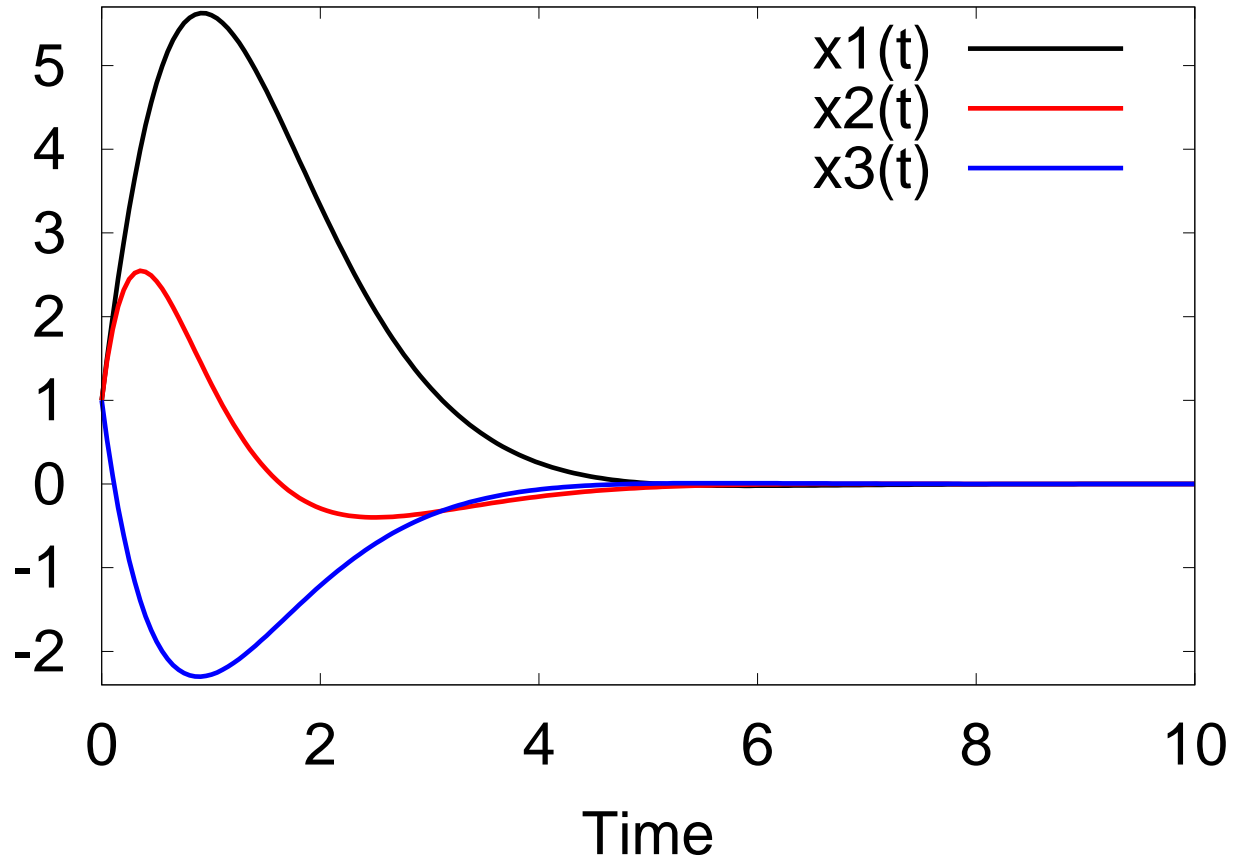
応用上の利点

制御器に計時機能が不要！「掛けっぱなし」の制御に適す．

実習 9.2 Code 15 を実行せよ．乱数で無作為に生成した A, b に対して，無限時間最適レギュレータ K が求まり，状態量の時間応答がプロットされる．Octave/Scilab 等には，最適レギュレータを求める専用の関数があり，ユーザーがリカッチ代数方程式を解く必要はない．

解答例

乱数で状態方程式を生成するため，時間応答は実行ごとに変化する．



第 13 回 動的システム入門

演習 3 — 最適レギュレータ

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>

演習の進め方

- テキストの 13 章「演習 3」を自習せよ。
- グループワークを成績評価の前提条件とする。
 - 決して単独では進めず，2 名以上のグループで取り組むこと。
 - 分からないことがあれば，まずグループで解決せよ。
 - それでも分からなければ，周辺のグループと共同で解決せよ。
 - 分かる学生がクラスに 1 人も居なければ，代表者が教員に相談せよ。

グループワークの重要性

権威（授業なら教員）に過度に依存せず，同格の仲間達と問題解決を図れる能力は，社会に出て高く評価される。自主的でありながら協調性も高いという，絶妙な評価につながる。

第14回 動的システム入門

レポートの出題

宇都宮大学 工学研究科 吉田 勝俊

<http://edu.katzlab.jp/lec/dsys/>